INTERPRETATIO NATURÆ,

SEU

PHILOSOPHIA

NEWTONIANA METHODO

EXPOSITA,

ET

ACADEMICIS USIBUS

ADCOMMODATA

A

JACOBO ZALLINGER

PHILOSOPHIÆ ANTEA PROFESSORE

ET SS. THEOLOGIÆ DOCTORE.

TOMUS II.

COMPLECTENS

PRINCIPIA MECHANICÆ TERRESTRIS

ET CÆLESTIS.



PERMISSU SUPERIORUM.

AUGUSTÆ VINDELICORUM

SUMPTIBUS JOSEPHI WOLFF

M DCC LXXIV.

PRÆFATIO.

Duo sunt, quæ Newtonianæ rationi philosophandi vitio dari, non aliorum narratione accepi, sed cum eandem sequerer ipse, ex reprehendentium ore hausi. Primum est: qui Newtonum sequuntur philosophiæ ducem, in solis fere naturæ legibus observando atque experiundo cognitis conquiescunt, de remotissimis caussis rerum, de corporum elementis, de natura virium, & generali earum theoria, ad

quam omnia naturæ effecta referri debeant, nihil magnopere definiunt, ac ne statuunt quidem adfirmate, eæne vires ad unicam simplicemque legem pertineant, ex interna natura materiæ, an Dei actione, vel principio quodam latente dimanent; atqui, aiunt, id proprium philosophiæ, & velut legitimum est, de rerum caussis disceptare. Alterum vero est: ea methodus, quæ Newtoniana dicitur, tota in analyticis formulis construendis hæret, & sublimioris etiam Geometriæ mysteriis tractandis, ut universa propemodum Physica Matheseos dominatui subiiciatur; quæ res admodum aspera est, & perdifficilis, captuque discentium & ingenio haud parum superior. De utroque accusationis genere, quoniam præsenti instituto meo obesse videtur, præfari me oportere censui.

Quæ de caussis rerum iis, quas synthetico ordine primas, analytico

ul-

ultimas, & remotiſſimas dicimus, ſtatui ab homine veritatis, quam litium amantiore queunt, ea neque ratio Newtoniana repudiat, neque ego, cum tempeſtiva videbitur ea tractatio, penitus prætermittam. At enim ex metaphyſicis contemplationibus de corporum natura ferre ſententiam; ex arbitrariis notionibus, & vocabulorum farragine de occultiſſimis cauſſis diſputare, ab ipſo Phyſices limine in intimas velle naturas penetrare, ſecundum congeriem idearum, quæ temere collectæ ſunt, & generalis theoriæ vel ſyſtematis nomine paſſim inſigniuntur; omnia naturæ arcana explicare, maximamque curam in conciliandis cum aſſumta theoria phænomenis collocare, ut, quæ diſſentire videntur, ea leviter prætereantur, vel ut quævis tractatio ad obſcuriſſimas de illa altercationes revolvatur; id vero nec progreſſibus pulcherrimæ diſciplinæ conducibile, nec perficiendæ

3 *di-*

discentium menti, optimisque cognitionibus imbuendæ idoneum, nec philosophiæ in humana vita usui, rerumque publicarum, vel artium commodis ullo pacto necessarium, vel adcommodatum esse arbitror. Quid enim voluptatis, quid ingenuæ eruditionis, quid emolumenti habet philosophia, quæ ex incertissimis de natura virium, primorumque elementorum disputationibus prope tota compacta est, de qua, cum pedem extuleris ex institutione, in cætu doctorum hominum ne verbum quidem facere possis. Newtoniana igitur ratio philosophandi aliis aliorum generibus sine dubio longe præferenda est, quæ observationum solertia, adcurationeque, & matheseos ope naturam rerum a divino Artifice conditam, non humano adumbratam ingenio vere fideliterque interpretari conatur, mentemque certissimis, & fœcundissimis cognitionibus exornat, atque ad veritatem recta

me-

methodo investigandam tum in usu humanæ vitæ, tum in aliis disciplinis informat; ut adeo Philosophus, si nominis dignitatem sustinet, non nisi interpres naturæ, nec aliud Philosophia, nisi interpretatio naturæ sit. Atque hic quidem scribenti mihi de rebus physicis propositus scopus fuit; eritque penes Benevolum Lectorem dispicere, quatenus eundem in amplissimo, & perdifficili argumento adsequutus sim. Eundem certe in finem veluti clave quadam genuinæ interpretationis Geomotriæ & Algebræ elementis sæpenumero usus sum; quæ res, uti reprehensionis apud nonnullos, ita præfationis meæ alterum caput est.

Divinæ matheseos præstantissimum esse in philosophia excolenda usum, summi quique, & doctissimi nostræ ætatis viri re ac verbo docuerunt; nec vero, qui Newtonianæ rationi adversantur, totum hoc reprehendunt

 ma-

mathematice philosophari, si modo remissius id agatur, atque, ut aiunt, adcommodate ad discentium ingenia; sed tantum studium, tamque multam operam, quantam a quibusdam poni in ea re sibi persuadent, ponendam esse haud arbitrantur. Atque isti quidem, quibus ita placet, mathesin ad naturæ interpretationem adhibere, ut id moderate fiat, difficilem quandam temperantiam postulant in eo, quod semel admissum coerceri, reprimique vix potest, ut propemodum iustioribus utamur illis, qui omnino avocant a mathesi, & historiam quandam philosophiæ, ac philosophorum petunt, quam iis, qui infinitis rebus modum constituunt, in reque eo meliore, quo maior est, mediocritatem desiderant. Quibus ego primum respondeo, non esse in meo, nec cuiusvis philosophantium arbitrio positum, si verum sectari, naturamque explicare velimus, arripiendi viam, seu methodum, quam

quis-

quisque maxime optarit; cum enim divinus Conditor res corporeas certis veluti numeris, menſuris, proportionibus, & virium rationibus adſtrinxerit, ſiquis eas res cognoſcere ex nobis avet, matheſeos uſu, adplicationeque ſuperſedere minime poſſumus. „ *In Geometriæ adita quædam, inquit Krafftius P. II. Prælectionum Academic. in Præf. me ſubinde penetraſſe, moleſtum erit nemini, niſi illis forſitan, qui negligunt ſapientiſſimum illud effatum:* Pondere, menſura, numero Deus omnia fecit; *qui occulta naturæ artificia, & non credibilem diligentiam, venuſtatemque negligunt, quique adeo phyſicam fractam, & elumbem oſcitanter colere, quam circino, & regulæ adſuefacere ſe, malunt, excidentes ſic fine ſalutari, qui eſt, ut in ſummo naturæ artificio detegamus, & venerernur ſummum artificem,*

„ & rebus a tanto fabricatore decir- „ cinatis delectemur innocenter. „ Siquid igitur de Mechanica terrestri, quæ leges motuum in terrestribus corporibus, & generatim examinat, siquid de Mechanica cœlesti, quæ easdem in cælestibus corporibus investigat, paullo adcuratius differendum est, si theoria gravitatis universalis, verbo, si Physica Newtoniana explicanda est, elementorum Algebræ, & Geometriæ usus eripi nobis haud potest, nec sane debet; quæ est enim in iis rebus perdiscendis tanta difficultas, ut ab adolescentibus, qui ingenium & industriam, ut par est, ad philosophiam adferunt, superari haud possit. Ignavia autem nonnullorum, aut hebetudo mentis progressibus aliorum, quos natura, ac solertia scientiis tractandis addixit, fraudi esse haud debet. Nulla est paullo longior, aut difficilior demonstratio in tota scriptione hac, quæ non pluribus locis

&

& temporibus a me proposita, & adcurate percepta fuit ab iis, qui prælectionibus meis audiendis operam, quam oportebat, navarunt; cuius rei specimen in exercitationibus publicis cum admiratione plausuque spectantium dederunt. Et vero si rationem, ac viam, quam in diducendis principiis utriusque Mechanicæ tenui, relegam animo, vereor sane, ne in usu elementorum matheseos aliis modum excessisse, aliis ne attigisse quidem videar, eodemque tempore & de intemperantia quadam mathematica, & de nimia parcitate accuser. Quis omnium doctorum hominum iudiciis ac desideriis faciet satis? Quapropter cum pluribus annis in exponendis Philosophiæ institutionibus essem versatus, experientiæ potissimum subsidio definire adlaboravi, quatenus in ea re progredi liceret. Vale, Benigne Lector, & conatus nostros æqui boni consule.

SERIES TRACTATIONUM

TOMI II.

SECTIO I. INTRODUCTIO AD MECHANICAM.

Pag.

SECTIO II. DE MOTU CORPORUM RECTILINEO.

SECTIO III. DE CONTRARIIS ACTIONIBUS VIRIUM IN CORPORIBUS SOLIDIS.

C. III.

SECTIO IV. DE PRESSIONE, ÆQUILIBRIO, ET RESISTENTIA FLUIDORUM.

SECTIO V. DE MOTU CORPORUM CURVILINEO.

SECTIO VI. DE ANALYTICA INVESTIGATIONE GRAVITATIS UNIVERSALIS.

SE-

PHYSI-

PHYSICES
PARS PRIMA.
SECTIO I.
INTRODUCTIO AD MECHANICAM.
CAPUT I.
Regulæ Physicæ Newtonianæ.

Newtonus initio L. III. princip. Math. Phil. Natur. regulas quasdam philosophandi ad Physicam maxime pertinentes præscripsit; quæ si observentur adcurate, uti par est, methodum Newtonianam ab omni alio genere Philosophiæ plurimum distinguunt. Cum igitur magnopere intersit, quam viam quisque in naturæ investigatione primo ingrediatur, ut, si quis primos passus recte fecerit, ad maximarum rerum cognitionem pervenire possit; idcirco eas regulas totidem pæne verbis, quibus propositæ sunt ab incomparabili viro, recensebimus.

§. I.

Regula I. *Caussæ rerum naturalium non plures „ admitti debent, quam quæ veræ sunt, & earum phænomenis explicandis sufficiunt.* Dicunt utique Philosophi: Natura nihil agit frustra; & frustra fit per plura, quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est, & rerum caussis superfluis non luxuriat. „

A Hæc

Hæc regula opponitur dicto CARTESII 3. Part. Princip. ita fcribentis: *fe velle confiderare, non quomodo mundus defacto fit conditus, fed quomodo condi potuerit.* At Newtonus, cum a Philofophorum fomniis, & diffidiis abhorreret, & divini conditoris opera, non humani ingenii figmenta noffe vellet, illud primo conftituit, quæ cauffæ rerum pro genuinis habendæ, quæ repudiandæ fint. Cauffa genuina eft, quæ & *vera* eft, & *fufficiens*, hoc eft, cuius & exiftentia realis, & fufficientia oftendi poteft. Exiftentia rerum corporearum folo ufu fenfuum, & inftitutis obfervationibus, atque experimentis innotefcit. Sufficientia cauffæ ope Mathefeos demonftranda eft; cum enim cauffa, quæ genuina eft, effectui proportionalis, & effectus cauffæ effe debeat, neceffe eft, ut & magnitudo effectuum, & quantitas virium cauffæ ad calculum revocetur; quod fine Mathefi, quæ rerum quantitates examinat, fieri nequit.

Recte Newtonus ad Philofophorum auctoritatem provocat, ut de prima Phyfices lege cum iis quodam modo tranfigat, fuamque methodum eorundem qui alia omnia fentiebant, dictis vindicet. Quod non exiftit, cauffa effe realium phænomenorum plane nequit; quique pro cauffa habet quidquam, nec id revera exiftere in natura, iisque phænomenis efficiendis fufficere docet, Philofophiam cum vanis commentis mifcet, aut hypothefes fingit, quarum idea ab idea cauffæ diligenter fegreganda eft ei, qui naturam interpretari, aut contemplari amat. Hypothefis fi legitima eft, non exiftentiam, & veritatem realem, fed idealem duntaxat, & folam poffibilitatem exhibet. Et quamvis in particulari cafu, quando ex obfervatione, atque experimentis certitudo, atque evidentia erui nequit, ufus fit hypothefium; tamen reiiciendæ funt generales hypothefes, queis tota Phyfica, aut quidem maxima eiusdem pars ceu fundamento nititur; quales funt de æthere quaquaverfus diffufo, omnisque figuræ, actionis, ac motus capaci, de natura primorum elementorum corporum, utcumque tali hypothefi fuffragari videatur Metaphyfica, quam ex præconceptis opinionibus, & in favorem Phyfices non nulli condunt. Nam, ut Newtonus L. III. Princip. in Schol. gen. inquit, hypothefes feu metaphyficæ, feu phy-

physicæ, seu qualitatum occultarum, seu mechanicæ in Philosophia elementari locum non habent. Denique & illud constat, repudiandas esse caussas superfluas. Inepte igitur quis dicat, æstum maris legibus attractionis conformari, sed pro caussa illius etiam ingurgitationes in cavernas terræ, & regurgitationes admitti posse. Si enim vera eius phænomeni caussa ex principiis observando, atque experiundo stabilitis deprehensa est, vana est, & otiosa quævis alia caussa, quia Deus & natura nil faciunt frustra, atque, ut VV. Metaphysici dicebant, entia non sunt multiplicanda sine necessitate; cuius effati rationem a priori derivarunt ex sapientia divini conditoris, & ex legibus ordinis, ac finium universi, ob quas nihil supervacui haberi in natura constat.

§. II.

Regula II. „ *Ideoque effectuum naturalium eiusdem* „ *generis eædem adsignandæ sunt caussæ, quatenus fieri* „ *potest*, uti respirationis in homine, & in bestia; de„ scensus lapidum in Europa, & in America; lucis in „ igne culinari, & in sole; reflexionis lucis in terra, „ & in planetis. „ His quidem exemplis istam regulam Newtonus illustrat cit. loc. eamque ex priori deducit. Natura admodum simplex est, & in rebus eiusdem generis, aut speciei efficiendis & conservandis uniformis, sibique consona. Eadem paucis viribus & agendi instrumentis instructa efficit opera inter se magnopere discrepantia. Sapienter autem in hac enuncianda regula addidit Newtonus: *quatenus fieri potest*; nam ingenti solertia, & acumine opus est, ne quavis adparente similitudine effectuum in errorem inducamur; quod non nullis contigisse arbitror, qui similitudine, & proportione quadam effectuum, quos lumen, ac sonus nobis offerunt, utrumque in motu vibrationis cuiusdam materiæ situm esse voluerunt. Felicis ingenii est, in dissimilibus phœnomenis veram similitudinem invenire, quemadmodum Newtonus inter motum proiectorum in superficie telluris, & inter planetarum motus orbitas suas circa solem describentium detexit; unde

concludendum est vi huius regulæ, utriusque motus eandem statui caussam debere, & quemadmodum planetarum revolutiones per systema vorticum, aut pressionem cuiusdam subtilis materiæ, quæ secundum leges fluidorum adhuc cognitas ageret, minime effici possunt; ita nec terrestrium corporum gravitatem ab eadem materia provenire.

§. III.

Regula III. „ *Qualitates corporum, quæ intendi,* „ *& remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt, in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendæ sunt.* Nam „ qualitates corporum non nisi per experimenta innotescunt, ideoque generales statuendæ sunt, quotquot „ cum experimentis generaliter quadrant; & quæ mi- „ nui non possunt, non possunt auferri. Certe con- „ tra experimentorum tenorem somnia temere confin- „ genda non sunt, nec a naturæ analogia recedendum „ est, cum ea simplex esse soleat, & sibi semper con- „ sona. - - Corpora omnia impenetrabilia esse, non ra- „ tione, sed sensu colligimus. Quæ tractamus, impe- „ netrabilia inveniuntur, & inde concludimus, impe- „ netrabilitatem esse proprietatem corporum universo- „ rum. Corpora omnia mobilia esse, & viribus qui- „ busdam (quas vires inertiæ vocamus) perseverare „ in motu, vel quiete, ex hisce corporum visorum „ proprietatibus colligimus. - - Impenetrabilitas, mo- „ bilitas, & vis inertiæ totius oritur ab impenetrabili- „ tate, mobilitate, & vi inertiæ partium: & inde con- „ cludimus, omnes omnium corporum partes minimas „ - - esse & impenetrabiles, & mobiles, & viribus „ inertiæ præditas. Et hoc est fundamentum Philoso- „ phiæ totius. - - Denique si corpora omnia in cir- „ cuitu terræ gravia esse in terram, idque pro quanti- „ tate materiæ in singulis, & lunam gravem esse in „ terram pro quantitate materiæ suæ, & vicissim mare „ nostrum grave esse in lunam, & planetas, omnes „ graves esse in se mutuo, & cometarum similem esse „ gravitatem in solem, per experimenta & observa- „ tiones astronomicas universaliter constet, dicendum „ erit per hanc regulam, quod corpora omnia in se

„ mu-

„ mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum „ ex phœnomenis de gravitate universali, quam de „ corporum impenetrabilitate, de qua utique in corporibus cæleſtibus nullum experimentum, nullam prorſus obſervationem habemus. Attamen gravitatem „ corporibus eſſentialem eſſe, minime adfirmo. Per „ vim inſitam intelligo ſolam vim inertiæ. Hæc immutabilis eſt; gravitas recedendo a terra minuitur.

Newtonus extenſionem quoque & duritiem non modo omnium corporum, ſed minimarum quoque partium, ex quibus coaleſcunt corpora, generalem eſſe proprietatem concludit, propterea quod omnia corpora, quæ ſub ſenſus cadunt, & extenſa ſint, & dura; ac durities & extenſio totius a partium extenſione, & duritie, uti arbitratur, proveniat; Sed hæc quidem prætermiſi, ne aliorum opinioni videar detrahere, qui elementa corporum non modo ſimplicia, ſed omnis extenſionis penitus expertia ſtatuunt.

§. IV.

Regula IV: „ *In Philoſophia experimentali propoſitiones ex phœnomenis per inductionem collectæ, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, pro veris aut adcurate, aut quam proxime haberi debent, donec alia occurrerint phœnomena, per quæ aut adcuratiores reddantur, aut exceptionibus obnoxiæ.* Hoc fieri debet, ne „ argumentum inductionis tollatur per hypotheſes. „ Credebatur olim magnes ex obſervatione acus polos adcurate reſpicere; ſed obſervationes poſteriores directionem acus magneticæ multis variationibus atque adeo eam legem exceptionibus obnoxiam eſſe docuerunt. Aiebant Philoſophi: corporum terreſtrium gravitas quantitati materiæ proportionalis eſt; ſed detecta variatione gravitatis in variis terræ locis addendum ad eam propoſitionem fuit limitatio: in eodem terræ tractu. Sic corpora perpendiculariter ad centrum terræ tendunt; ſed in quibuſdam locis ob præaltos montes, ipſamque internam telluris ſtructuram deviationes quædam in pendulis ſunt obſervatæ. Quapropter ſiqua occurrunt diſcrepantia phœnomena, neceſſe eſt, ut generales propoſitiones inductione collectæ aptis exceptionibus, ſeu

determinationibus limitentur, ac restringantur; id quod hac lege significandum erat.

Nemo est fere hac ætate, qui hasce leges non probet, & magnopere tenendas putet. At ipso progressu Physices vel æstu quodam inveniendæ veritatis, vel impatientia indagandæ, vel ob sectarum, & auctoritatis præiudicia, proclive est, contra eas peccare, & a recto tramite discedere. Contemplationes Metaphysicæ de continuo in Philosophiam experimentalem passim intruduntur; atque ita fundamentum philosophandi, quod in solis observationibus, atque experimentis deductisque matheseos ope ratiociniis situm, ex obscurissimis, incertisque de natura primorum elementorum principiis, seu potius opinionibus sumunt; cumque omnem a natura saltum instar terrifici monstri exclusum velint, passim a consideratione paucorum phœnomenorum, & externa corporum specie ad remotissimas quasque caussas, intimamque rerum naturam explicandam transiliunt, prætermissis tractationibus mediis, a quibus, siqua iis opinionibus, verisimilitudo inest, tota pendet. Cæterum lucem quandam hisce regulis affundent tum ipsa earum adplicatio, tum ea, quæ in Logica de analogia, inductione, & hypothesibus dicta sunt §. XCI.

CAPUT II.

De Expressionibus Rationum in Mechanica usitatis.

Secundum primam Newtoni regulam investigandum est, an data caussa phænomenis explicandis sufficiat, id est, an sit effectui proportionalis. Quapropter generales quædam expressiones rationum, seu formulæ proportionem caussarum, & effectuum exprimendi tradendæ sunt. Nihil igitur in hac re ita proprium est Mathematicis, ut non iure quodam pertineat ad genuinam Physicam, quæ profecto quantitatem effectuum, & virium caussæ inter se comparare, atque earum rationem definire debet. Nulla etiam in tractatione harum formularum maior difficultas est, quam in vulgari usu regulæ aureæ, quam öpinor, discentium captu superiorem esse, nemo facile adfirmarit.

§. V.

§. V.

Definitio I. Quantitates, quæ crescunt, vel decrescunt, dicuntur *variabiles*: Si autem aliis variatis quantitas quædam non mutatur, sed eadem manet, vocatur *constans*, seu invariabilis. Siquod mobile eadem constanter celeritate movetur continuo crescit spatium confectum, & tempus motus: at celeritas, ut ponitur, non crescit, neque decrescit. Est ergo spatium, & tempus quantitas variabilis; at celeritas est constans. Si bini cursores eandem emetiuntur viam, sed inæquali tempore, & celeritate, spatium est constans, at tempus, & celeritas quantitates sunt variabiles. In circulo ordinatæ, sive lineæ rectæ a Diametro usque ad peripheriam normaliter erectæ a vertice diametri usque ad centrum perpetuo crescunt; inde a centro usque ad alterum verticem iterum decrescunt; sunt igitur hæ ordinatæ quantitas variabilis, at Diameter circuli est constans. Notandum vero, quod magnitudo quantitatum variabilium determinetur comparatione, seu relatione unius quantitatis ad aliam cum ea quomodocunque connexam, ita ut una variata etiam altera varietur constanti quadam lege, atque ita altera alterius mensura fiat. Hæc comparatio, seu relatio fere est ratio, & proportio geometrica, de qua sola in præsenti agitur: estque ea ratio vel *simplex*, si variatio, & determinatio quantitatis ab unica mensura, sive a variatione unius duntaxat quantitatis alterius pendet; vel est ratio *composita*, si variatio, & determinatio quantitatis pendet a pluribus.

Determinatio solius dimensionis in longum pendet ab unica mensura pro arbitrio assumta: e. g. a numero pedum, vel hexapedarum, ita ut longitudo sit duplo, triplo, aut in quacunque serie multipla vel submultipla maior, aut minor, si numerus pedum, vel hexapedarum est duplo, triplo, vel in quacunque serie multipla aut submultipla maior, aut minor. Hinc si longitudo spatii A est 1000 *pedum, & longitudo spatii a* 2000 *pedum erit* $A : a = 1000 : 2000 = 1 : 2$.

Hoc igitur casu ratio simplex habetur. At variatio, & determinatio superficierum a pluribus quantitatibus,

ceu mensuris, nimirum tum a longitudine, tum a latitudine alicuius superficiei, vel areæ. Sit area A, cuius longitudo B contineat 36 pedes, latitudo C 24 pedes, & area a, cuius longitudo b contineat 12 pedes, & latitudo c 8 pedes, erit prima area ad secundam, ut $36 \times 24 : 12 \times 8$; *sive* $A : a = BC : bc = 864 : 96 = 9 : 1$. *Pariter determinatio solidi, quod trinam habet dimensionem, pendet tum ex longitudine, tum latitudine, tum altitudine, seu profunditate. Sit solidum A; eius longitudo* $B = 4$, *latitudo* $C = 2$, *altitudo* $D = 1$; *& solidum a, cuius longitudo* $b = 7$, *latitudo* $c = 5$, *altitudo* $d = 3$; *erit* $A : a = BCD : bcd = 8 : 105$. *Sic ergo ratio habetur composita.*

§. VI.

Definitio II. quando in Mechanica ratio caussarum, & effectuum determinari dicitur, vox *caussa* latius sumitur, nempe pro omni eo, ex quo intelligitur, cur aliquid sit tantum, quantum est, non maius, aut minus, sive cur hanc, & non aliam magnitudinis rationem habeat. Pariter *effectus* censetur, cuius magnitudo ab altero, nempe a caussa, vel mensura pendet, ac determinatur.

Longitudo, superficies, solidum spectantur instar effectuum, qui a numero pedum in longum, vel a longitudine, latitudine, altitudine, seu profunditate tanquam a suis caussis, vel mensuris pendent.

§. VII.

Definitio III. Caussæ *homogeneæ* sunt, quæ eodem modo agunt, sive ad effectum concurrunt. Caussæ *heterogeneæ*, quæ ad effectum concurrunt dispari modo.

Si currum & homines, & equi, & boves trahunt, translatio currus est effectus productus a caussis homogeneis. Quia vero ad currum transferendum aliter concurrit numerus, aliter robur equorum, item aliter pondus impositum, & longitudo viæ (ab his enim omnibus translatio currus velut a caussis quibusdam pendet) idcirco istæ sunt caussæ heterogeneæ.

§. VIII.

§. VIII.

Definitio IV. Caussæ *agentes in ratione directa* sunt, quibus crescentibus effectus crescit, decrescentibus decrescit: caussæ agentes in *ratione reciproca*, quibus crescentibus effectus decrescit, decrescentibus crescit. Universe A est reciproce ut B, si A crescente, B decrescit, vel A decrescente, B crescit: directe vero A est ut B, si uno crescente etiam alterum crescat, vel uno decrescente pariter decrescat alterum.

Pondus currui impositum, & longitudo viæ, qua transferendus est currus, sunt caussæ agentes in ratione reciproca; nam quo maius est pondus impositum, aut quo maior conficienda est via, eo minor, ac difficilior est currus translatio. At commoditas viæ, & numerus, & robur equorum sunt caussæ in ratione directa agentes.

§. IX.

Definitio V, Quia omnis proportio est similitudo rationum, idcirco in ea proportione geometrica, in qua ratio effectuum ex ratione caussarum determinatur, binæ rationes, ac proin quatuor termini spectandi sunt. In his bini sunt *homogenei*, bini *respondentes*, quorum nempe singuli prioribus singulis respondent, vel cum iis connectuntur. Si in proportione $A : a = B : b$, A & a habeantur pro terminis homogeneis, erunt B, & b respondentes, ita, ut homogeneus A, & terminus respondens B ad eundem casum, vel rem eandem pertineant; pariter alter terminus a, & respondens b ad eundem casum vel rem sint referendi. Hoc modo celeritas C, & spatium S, & tempus T eundem motum, vel eundem casum, aut idem mobile respiciunt; & celeritas c, spatium s, tempus t ad alium motum, vel ad alium casum, aliudve mobile referri debent.

Maxime naturalis proportionem concipiendi modus est, ut, si homogeneus A ponitur primo loco, homogeneus a secundo loco, tertio loco consistat terminus respondens homogeneo A, & quarto loco terminus respondens homogeneo a; qui quidem ordo etiam in ratione reciproca servari potest, si nimirum termini unius rationis fiant denominatores fractionum, quarum numerator est unitas, vel quævis quantitas constans. Sit ratio reciproca, $A : a$

 $= b : B$;

$= b : B$; *fieri poterit* $A : a = \frac{1}{B} : \frac{1}{b}$ *uti ex elementis constat. Atque hinc caussæ directe agentes uti quantitas integræ, vel ut numeratores fractionum ponendæ sunt, caussæ vero reciproce agentes, ut denominatores fractionum ponendæ sunt, quarum numerator vel est caussa directe agens, vel si nulla adsit unitas servato eo, quem diximus, ordine maxime naturali.*

§. X.

Axioma. Effectus semper sunt proportionales suis caussis. Ac si effectus ab unica pendeat caussa vel mensura, ex ipsa notione caussæ, & effectus sæpe admodum perspicuum est, an sit directe, vel reciproce proportionalis, sive an sit caussa in directa ratione, vel reciproca agens. Si e. g. duo mobilia, quorum utrumque suam celeritatem, quam habet, semper eandem, & constantem retinet, spatia conficiant æqualia, manifestum est tempora, & celeritates esse reciproce proportionalia; quia, quanto celerius unum progreditur, tanto minore tempore indiget ad idem spatium percurrendum. Sæpe non nisi experientia, & ratiocinio deducitur, utrum ratio sit directa, vel reciproca, uti cum ostendemus, gravitatem corporum in suum centrum esse in ratione quadam reciproca distantiarum ab eodem centro. Ex axiomate illud quoque deducitur: siquis effectus non nisi a caussis eodem modo agentibus, quæ sint inter se homogeneæ, pendet, erit is ut summa caussarum homogenearum directe agentium, minus summa caussarum homogenearum reciproce agentium. Si currum homines, equi, & boves eadem trahunt directione, erit effectus, sive translatio currus, cæteris paribus, uti summa virium, quibus homines, equi, & boves trahunt. Siquod corpus impellitur vi & celeritate ut 1, dein iterum vi & celeritate ut 1; erit vis & celeritas corporis, ut $1 + 1 = 2$. Si navis adverso flumine trahitur, a summa virium, quibus trahitur, subtrahenda est vis contraria fluminis, ceu caussa reciproce agens. Ut habeatur magnitudo, seu quantitas motus alicuius corporis, in quo omnes minimæ partes eadem celeritate progrediuntur, ea est, ut summa

ma virium, quæ insunt in omnibus minimis partibus, sive quia omnes minimæ partes pari vi, & celeritate progrediuntur, erit quantitas motus ut factum ex intensione vis, aut celeritatis unius in summam omnium partium.

Si effectus ab unica caussa vel a pluribus homogeneis pendet, haud ægre simplici proportione effectuum ratio exprimitur. At si a pluribus pendet heterogeneis directe, & reciproce agentibus, quæritur, quomodo ratio effectuum relate ad omnes caussas simul concurrentes determinanda sit. Qua quidem de re theorema generale adferemus æque fæcundum, ac facile, quod per totam Mechanicam amplissimi usus est. Eundem in finem unicum præmitto

§. XI.

Porisma. *Si ad binas quantitates, vel in proportione ad binos terminos unius rationis accedit eadem tertia quantitas heterogenea, per quam uterque terminus æqualiter intenditur, aut remittitur, id est, eodem modo sumitur, ratio earum quantitatum, vel proportio terminorum non mutatur, perinde ac si ea quantitas heterogenea non accessisset.* Nam ex Elem. Si est A : a = B : b, erit etiam A : a = B m : b m, sive m sit quantitas integra, sive fracta.

Istuc quidem etiam in vulgari usu regulæ aureæ sæpe occurrit. Sint quantitates homogeneæ A, & a operarii 10, *& operarii* 5; *illi intra diem murum 6 ped. construant, hi eodem tempore murum* 3 *ped. eritque proportio*, 10 : 5 = 6 : 3. *Accedat nunc ad binos terminos quantitas heterogenea m, nempe tempus* 3 *dierum, & perficient operarii A murum* 18 *ped. & operarii a murum* 9 *ped. quemadmodum ergo prius fuit ratio inter muros ceu effectus ut* 10 : 5 *sic erit & postea ut* 30, *&* 15, *sive ut* 6 : 3. *Ratio ergo effectuum non mutatur. Nempe quantum caussæ intenduntur a tertia heterogenea m, in eadem ratione intenduntur effectus, qui erunt ut* 18 : 9. *Similiter res habet, si ad caussas accedit eadem heterogenea quantitas reciproce agens; quantum enim caussæ impediuntur, vel minuuntur ab eadem tertia, tantundem impeditur, vel minuitur effectus.*

§. XII.

§. XII.

Theorema generale. *Effectus quicunque productus a pluribus caussis heterogeneis est in ratione composita directa caussarum agentium in ratione directa, & reciproca caussarum agentium in ratione reciproca.* Dem.

I. Si effectus producuntur a pluribus caussis heterogeneis, & directe agentibus, erunt ii in ratione composita directa omnium caussarum directe agentium. Sit effectus E productus ab eiusmodi caussis C, & M; effectus e a caussis c, & m. Dico esse $E : e = C\,M : c\,m$. Concipiatur enim tertius effectus x productus a caussis C, & m, quarum una effectui E, altera effectui e communis est; quoniam effectus E producitur a caussis c, & M; effectus x a caussis C, & m, manifestum est, quod utrinque ad caussas M, & m accedat eadem tertia heterogenea C; quæ rationem effectuum non mutat, perinde, ac si non accessisset; erit igitur $E : x = M : m$, adeoque $x = \frac{E\,m}{M}$.

Cumque effectus e sit productus a caussis c, & m; effectus x a caussis C, & m, erit ob $m = m$
$e : x = c : C$ consequenter $x = \frac{C\,e}{c}$

Quare ob binos valores æquales tertio valori x, erit

$$\frac{E\,m}{M} = \frac{C\,e}{c}$$

$$E\,c\,m = C\,M\,e.$$

Qua æquatione in analogiam resoluta fiet
$$E : e = C\,M : c\,m.$$

Ponatur effectus E productus a tribus caussis heterogeneis C, M, N, & effectus e a caussis heterogeneis c, m, n, sintque hæ caussæ, ut ante, directe agentes. Dico esse $E : e = C\,M\,N : c\,m\,n$. Nam concipiatur denuo a caussis C, M, & n productus effectus x, ut aliquæ huius effectus x caussæ, vel aliqua, quæcun-

cunque sit, communis ponatur cum effectu E, & aliquæ, vel aliqua, quæcunque sit, communis cum effectu e. Quia in nostra hypotesi effectus E pendet a caussis C, M, N: effectus x a caussis C, M, n, patet, ad caussas N & n accedere eandem, vel easdem heterogeneas C, & M, quæ perinde se habent, ac si non accessissent; erit igitur $E : x = N : n$.

& $$x = \frac{E\,n}{N}:$$

rursus ob eandem rationem, si effectus x comparatur cum effectu e, erit ob prius demonstrata $e : x = c\,m : C\,M$, hinc $x = \frac{C\,M\,e}{c\,m}$

ob binos valores æquales tertio x, fiet

$$\frac{E\,n}{N} = \frac{C\,M\,e}{c\,m}$$

sublatis fractionibus $E\,c\,m\,n = e\,C\,M\,N$

factaque resolutione in analogiam

$$E : e = C\,M\,N : c\,m\,n.$$

Similis demonstratio habetur, si effectus a pluribus quam tribus caussis heterogeneis directe agentibus producitur.

II. Si effectus E, & e producuntur a pluribus caussis heterogeneis, & *reciproce agentibus* e. g. F, L, & f, l, erunt iidem in ratione composita reciproca omnium caussarum reciproce agentium, nempe

$$E : e = \frac{1}{F\,L} : \frac{1}{f\,l}.$$

Demonstratio eodem prope modo peragitur, posito tertio quodam effectu, qui pendet a caussis L, & f reciproce agentibus; erit $E : x = \frac{1}{F} : \frac{1}{f}$

$$x = \frac{E\,F}{f}$$

& rur-

& rursus $e : x = \frac{1}{l} : \frac{1}{L}$

$$x = \frac{e\,l}{L}$$

quare ob valores æquales fit $\frac{E\,F}{f} = \frac{e\,l}{L}$

$$E\,F\,L = e\,f\,l$$

unde habetur analogia:

$$E : e = f\,l : F\,L = \frac{1}{F\,L} : \frac{1}{f\,l}.$$

III. Universe effectus productus a pluribus caussis heterogeneis partim directe, partim reciproce agentibus est in ratione composita ex directa, caussarum directe agentium, & reciproca caussarum reciproce agentium, sive, quod in idem recidit, effectus, qui a pluribus caussis heterogeneis pendet, est ut productum ex caussis, quæ, dum crescunt, ad incrementum effectus conferunt, divisum per productum ex caussis, quorum incrementum effectum minuit. Si enim solæ ponuntur caussæ heterogeneæ directe agentes;

erit $E : e = C\,M\,N : e\,m\,n$. n. I.

Si solæ ponuntur caussæ reciproce agentes,

erit $E : e = \frac{1}{F\,L} : \frac{1}{f\,l}$. n. II.

Si igitur utriusque generis caussæ concurrunt

erit $E : e = \frac{C\,M\,N}{F\,L} : \frac{c\,m\,n}{f\,l}$

Quæ conclusio ut penitus perspiciatur, ponatur iterum tertius effectus x, qui pendeat a caussis heterogeneis, directe agentibus C, M, N, & a caussis reciproce agentibus f, l.

Fiet primo per Porif. §. XI. $E : x = \frac{1}{F\,L} : \frac{1}{f\,l}$.

& $e : x = c\,m\,n : C\,M\,N$

unde

unde fit $x = \frac{E F L}{f l} = \frac{C M N e}{c m n}$

$$E F L c m n = e f l C M N$$

$$E : e = \frac{C M N}{F L} : \frac{c m n}{f l}.$$ Q. e. D.

§. XIII.

Corollarium I. Tota vis huius theorematis eo tendit, ut: si nota sit ratio, quam singulæ caussæ seorsim habent ad effectum, nempe directam, vel reciprocam, inveniatur ratio, quæ ex omnibus caussis simul concurrentibus exsurgit. Quapropter omnis labor in eo est, ut singuli termini, sive singulæ caussæ, quæ ad effectum concurrunt, recte conferantur, videaturque, utrum directe vel reciproce agant. Istuc vero ex idea caussarum & effectuum elucet, vel aliunde innotescere debet, uti supra adnotavi §. X. Sic perspicuum est, lucrum usurarii tanquam effectum crescere, quo maior fuerit peccunia exposita, quo longiore tempore fuit exposita, & quo plus accipitur pro centum. Hæ igitur caussæ rationem directam habent. Sic pretia sunt mercibus, vel quantitati earum, expensæ numero animalium alendorum directe proportionales: tempus vero animalibus alendis per datam annonam reciproce proportionale. Si plures certam pecuniæ summam contulerunt, & commune quoddam lucrum adepti sunt, erit pars lucri totius, quæ singulis debetur, directe proportionalis parti pecuniæ a singulis collatæ; hinc existit proportio: ut tota massa ad totum lucrum, sic pars massæ ad partem lucri; quæ quidem proportio regulam simplicem societatis continet.

Utor tritis admodum exemplis, tum ut idea caussæ directe vel reciproce agentis maiore claritate sese animis ingerat, tum ut pateat, nihil supra vulgarem usum regulæ aureæ magnopere contineri in hoc theoremate, proindeque nimis arduum videri haud posse; Est tamen illius usus in Mechanica plane necessarius; idemque omnes casus regulæ aureæ sive directæ, sive inversæ, & quomodo-

docunquè compofitæ adplicari poteft unica fimplice operatione. Sumantur enim pro effectibus termini bini homogenei ii, quorum alter ignotus eft, & inveftigari debet. Primo loco ponatur terminus notus, fecundo ignotus, tertio loco confiftant termini primo cognito re... agentes, ita ut fiquæ cauffæ vel conditiones (uti alias vocitant) fint reciproce agentes, eæ fiant denominatores fractionum, quarum numerator funt cauffæ directe agentes, fiquæ adfint, vel unitas. Sit notus cafus: operarii 3 ad cædendas 35 *orgias ligni egent diebus* 6, *fi per diem laborent horis* 7; *quot diebus indigent operarii* 8 *ad orgias* 50, *fi laborent per diem horis* 8? *Effectus latiore fenfu, ut in Mechanica, funt dies, quibus operarii indigent. Relate ad hosce dies, vel ad numerum dierum numerus orgiarum eft cauffa directe agens*; eo maior *enim dierum numerus erit*, quo plures *orgiæ cædendæ funt. At numerus operariorum, & horarum, quibus intra diem laborant, funt cauffæ reciproce agentes relate ad numerum dierum. Nam* eo minor *hic erit*, quo plures *funt operarii*, & quo pluribus *horis laborant intra diem. Igitur fecundum pofitam a nobis regulam fiat*

$$6 : x = \frac{35}{3\times7} : \frac{50}{8\times8} = \frac{1}{3} : \frac{10}{8\times8} = 64 : 30$$

unde fit $x = \frac{180}{64} = 2\frac{13}{16}$. *Hoc quidem modo, fiquis in fractionibus ad minores terminos reducendis paullum exercitatus fit, breviffima, ac tutiffima via eiusmodi cafus utcunque complicati refolvuntur. Sed propius ad Mechanicas rationum expreffiones accedendum eft.*

§. XIV.

Definitio. Formulæ, uti in Mechanica fumuntur, funt compendiariæ expreffiones proportionis geometricæ, in quibus pro quatuor terminis duntaxat bini refpondentes ponuntur. Quotiescunque igitur quantitates variabiles & heterogeneæ e. g. C & S, id eft, fpatium, & celeritas in conftanti quadam ratione mutantur, hæc rationum æqualitas in Mechanica per æquationem exprimitur, ponendo C = S; loco: C: c = S: s.

Quo

Quo casu signum æqualitatis = non denotat, quantitatem C esse reipsa æqualem quantitati S (nam hæ quantitates sunt heterogeneæ, nec communem mensuram habent, sed id signum indicat, quantitatem C crescere, vel decrescere eadem ratione, qua crescit, vel decrescit quantitas S; ac si C denotat celeritatem, S spatium, ea formula sic pronuntiatur: celeritates sunt in ratione directa spatiorum, vel sunt directe ut spatia. Si C iterum celeritatem exprimat, & T tempus, habeaturque formula $C = \frac{1}{T}$, sensus est, celeritates sunt in ratione reciproca temporum, vel reciproce ut tempora. Expressio $S = C\,T$ indicat, quantitatem S eodem modo variari, quo variatur productum ex quantitate C in quantitatem T, sive si eæ sint literæ initiales spatii, celeritatis, ac temporis, sensus formulæ est, spatia sunt in ratione composita celeritatum, ac temporum. Formula $A = B^2$ vel $A = B^3$, indicio est, quantitatem A crescere vel decrescere directe, ut quadratum, aut cubus quantitatis B crescit, vel decrescit, dicimusque, A est in ratione duplicata, vel triplicata quantitatis B. Hæc vero expressio $A = \frac{1}{B^2}$ significat quantitatem A crescere, quantum decrescit quadratum quantitatis B, sive A est in ratione reciproca duplicata quantitatis B. Vel si sit $A = \frac{1}{\sqrt{B}}$, A est in ratione reciproca subduplicata quantitatis B.

Qui ista ignorat, etsi toto biennio disputet in philosophica palæstra, ne idioma quidem philosophicum callere hac ætate convincitur, ac ne librum quidem de rebus physicis tractantem, qui quidem dignus sit, ut in hanc scientiarum lucem prodeat, intelligere valet.

§. XV.

Regula generalis de tractatione, & variationibus formularum est hæc: *Omnes variationes, quæ in pro-*

portione geometrica circa binos terminos unius rationis, vel circa binos antecedentes, aut consequentes fieri possunt salva proportione, eædem in tractatione, & variatione formularum legitime fient. Sequitur id ex notione formulæ mechanicæ, quæ non nisi binos terminos unius rationis, aut binos antecedentes, vel binos consequentes exprimit. Hinc vero per sese fluunt sequentia

§. XVI.

Corollaria. I. Si sit $C = \frac{S}{T}$; erit $C\,T = S$, & $T = \frac{S}{C}$. Nam formulæ $C = \frac{S}{T}$, sensus est hic: $C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$. Porro salva proportione fieri potest multiplicando $C\,T : c\,t = S : s$; unde nascitur formula $C\,T = S$. Similiter de sequentibus corollariis ratiocinandum est.

II. Siquis terminus in formula ponitur constans e. g. S in priore formula $C = \frac{S}{T}$, eius loco unitas substitui potest hoc modo $C = \frac{1}{T}$. Universe si formula $p = \frac{a\,b\,x}{c\,y}$ denotet valorem quantitatis p, qui valor pro absoluto sumitur, ponanturque a, b, c quantitates constantes, formula traducitur ad hanc $p = \frac{x}{y}$, qua reductione eadem fit simplicior, sed non iam absolutum valorem quantitatis p, sed rationem duntaxat exhibet, qua is valor secundum variationes quantitatis x, & y exhibetur.

III.

III. Quia rationes similes eidem tertiæ, vel similibus aliis, sunt inter se quoque similes, legitima erit substitutio æqualium valorum; quare si fit $C = \frac{S}{T}$, & $C = \frac{Q}{M}$, fieri potest $\frac{S}{T} = \frac{Q}{M}$. Ob hanc similitudinem rationum loco unius factoris, aut divisoris alius factor, aut divisor eiusdem rationis subrogari potest. Si fit $V = \frac{C^2}{D}$, & $C^2 = \frac{D^2}{T^2}$, erit $V = \frac{D^2}{T^2 D} = \frac{D}{T^2}$. Si fit $V = \frac{D}{T^2}$, & $T^2 = D^3$, erit $V = \frac{D}{D^3} = \frac{1}{D^2}$.

IV. Quia potentiæ eædem quantitatum proportionalium sunt proportionales, & radices eædem quantitatum proportionalium pariter proportionales; idcirco si habeatur formula $A^m = D^n$, fieri potest $A = D^{\frac{n}{m}}$; vel si fit $T^2 = D^3$, erit etiam $T = D^{\frac{3}{2}}$, & $D = T^{\frac{2}{3}}$.

V. Quemadmodum si quantitas quædam est constans, ea æqualis unitati poni potest: ita vicissim, si in data hypothesi ratio quantitatis per unicam heterogeneam exprimitur, cum ea generatim a pluribus pendet, colligitur, cæteras, quæ non exprimuntur, esse constantes. Si enim generatim est $C = \frac{S}{T}$, & in quadam hypothesi fit $C = S$, quantitas T necessario æquipollet unitati, & constans est; nam ob binos valores æquales C, fit $\frac{S}{T} = S$; quod verum non est, nisi T fit $= 1$.

 VI.

VI. Ratio æqualitatis habetur, si in ratione composita ex directa unius, & reciproca alterius quantitatis, ponuntur hæ quantitates habere inter se rationem directam. e. g. Si sit $C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t} = S\,t : s\,T$.

Si detur hypothesis $S : s = T : t$, erit $S\,t = s\,T$; ac proin $C = c$; quæ est ratio æqualitatis. Pariter si in ratione composita ex directa binarum quantitatum, hæ rationem reciprocam habere ponuntur, fiet ratio æqualitatis. Sit $Q : q = M\,C : m\,c$

& ponatur $M : m = c : C$; ut sit $M\,C = m\,c$ erit $Q = q$.

Hæ quidem variationes ipso usu & progressu Physices familiares fient, plurimumque lucis acquirent, cum nunc quidem obscuræ fortassis videantur. Si nomen caussæ sensu strictiore sumitur, nempe pro eo, quod vere agit, & efficientiam quandam habet ceu pro operariis, scribis, viribus activis &c., manifestum est ex theoremate generali, effectus E semper esse in ratione composita directa caussarum C, & temporum T, ut sit $E : e = C\,T : c\,t$; *unde formula sumitur* $E = C\,T$. *Et* $C = \frac{E}{T}$, *denique* $T = \frac{E}{C}$ *h: e* 1° *caussæ sunt in ratione composita ex directa effectuum, & reciproca temporum; nam eo maior sit caussa necesse est, quo maiorem effectum gignit, & minore tempore indiget;* 2° *tempora autem sunt in ratione composita ex directa effectuum, & reciproca caussarum.* 3° *Caussæ eædem producunt effectus temporibus, quibus agunt, proportionales; nam si in formula* $E = C\,T$, *ponatur C quantitas constans, erit* $E = T$. 4° *Effectus a caussis diversis eodem tempore producti, sunt ipsis caussis proportionales; si enim T est quantitas constans, fit* $E = C$. 5° *Si vires caussarum, & tempora, quibus agunt, reciprocant, effectus sunt æquales; nam ex hyp.* $C : c = t : T$, *proindeque* $C\,T = c\,t$; *igitur etiam* $E = e$, *uti adnotavimus in Corollario VI.*

Po-

Ponuntur autem caussæ uniformiter agentes, sive tales, quæ intra quodvis æquale tempus æquales effectus edunt. Cæterum ex formula $E = T$ *n.* 3. *exercitationis gratia solvi potest problema arithmeticum Newtoni: datis plurium agentium A, B, C viribus, quæ temporibus e, f, g producunt respective effectus a, b, c, determinare tempus x, in quo datum effectum d coniunctim producunt. Quia hæ caussæ coniunctim agunt tamdiu, donec totus effectus sit absolutus, idcirco tempus x omnibus commune est in edendo effectu d. Quare fiat: ut tempus e ad effectum a; ita tempus x ad partem effectus, quam caussa vel agens A confert; & sic de reliquis agentibus, ut fiant proportiones*

$$e : a = x : \frac{ax}{e}$$

$$f : b = x : \frac{bx}{f}$$

$$g : c = x : \frac{cx}{g}$$

Ex conditione problematis summa horum effectuum partialium æquare debet totum effectum d a tribus agentibus coniunctim productum. Quare erit

$$\frac{ax}{e} + \frac{bx}{f} + \frac{cx}{g} = d$$

& sublatis fractionibus $afgx + begx + cefx = defg$: *&* $x = \frac{defg}{afg + beg + cef}$.

Ut generalis hæc solutio ad casum singularem vulgaris arithmeticæ adplicetur, sint tres mercenarii, qui opus quoddam certis temporibus seorsim quisque perficiunt. Primus A semel in tribus septimanis, alter B ter in octo septimanis, tertius C quinquies in duodecim septimanis; quæritur, quanto tempore id opus simul absolvant. Si hic casus cum problemate superiore comparetur, erit $a = 1$. $e = 3$. $b = 3$. $f = 8$. $c = 5$. $g = 12$. *d fiat* $= 1$. *erit* $x = \frac{288}{324}$ *sive dividendo per* 36, $x = \frac{8}{9}$.

 quæ

quæ fractio denotat partes septimanæ unius, intra quas effectus d absolvitur; cum vero septimana in 7 dies, dies in 24 horas, & hora in 60 minuta dividatur, reperietur $x = 6$ *dies, 5 hor. 20 min.*

CAPUT III.

De Prima Corporum Idea.

Ex regula tertia Newtoni §. III. deducitur prima idea corporis naturalis, quod Physices obiectum est; primam adpello hanc ideam propterea, quod ea ex constanti sensuum usu, & observatione hauriatur, & a nulla pendeat hypothesi, vel controversia philosophica, quæ in ipso Physices exordio a non nullis admodum intempestive adferri solet. Sed qui Newtonianæ methodo inhærent, qua quidem spectata natura & conditionne mentis nostræ nulla præstantior excogitari potest, res incertas a certis diligenter segregant.

§. XVII.

Definitio I. Corpus est substantia extensa, divisibilis, impenetrabilis, iners & mobilis. Est igitur corporis idea complexa ex partialibus ideis earum qualitatum, seu proprietatum, quæ in omnibus corporibus, in quibus experimenta instituere licet, deprehenduntur, quæque intendi, & remitti nequeunt. Nimirum aliæ sunt corporum qualitates, seu proprietates *specificæ*, quæ non omnibus generatim corporibus, sed certæ duntaxat eorum classi, vel speciei insunt, uti in metallis diversa ductilitas, elasticitas, fusibilitas: aliæ sunt proprietates *genericæ*, quæ omnibus corporibus cuiuscunque generis competunt, uti extensio, divisibilitas, impenetrabilitas, inertia, mobilitas. Dein aliæ vocantur corporum proprietates *relativæ*, quæ a compositione, & adgregatione partium pendent uti sunt cohærentia, vel soliditas, & fluiditas; nam corpora, quorum partes firmitate quadam cohærent, *solida* dicuntur, uti metalla, ligna, lapides &c. quorum vero partes facillime separantur, sunt fluida, uti aer, aqua &c. Relativis pro-

prie-

prietatibus opponuntur *abſolutæ*, quæ non a partium compoſitione, ſed ab ipſis elementis, eorumque natura pendent, uti ſunt inertia, & mobilitas, de qua ſequente capite diſſeremus.

Inter genericas & abſolutas corporum proprietates non nihil intereſt; cum enim omne corpus ſit compoſitum, fieri poteſt, ut adfectiones quædam ob partium adgregationem omnibus plane corporibus competant, & genericæ ſint; quæ tamen ob hanc ipſam cauſſam, quod a compoſitione proveniant, non abſolutæ, ſed relativæ dicendæ erunt. Qui puncta penitus inextenſa ſtatuunt, corporum extenſionem neceſſario pro relativa qualitate habent.

§. XVIII.

Obſervatio. In vacuo omnia corpora terreſtria, utcunque pondere differant ceu plumbum, & plumula, eadem celeritate decidunt; hinc diverſitas ponderum non a diverſo niſu minimorum elementorum, ſed a diverſo eorum numero, ſeu a diverſa quantitate materiæ provenit.

Duo globi eiusdem magnitudinis ligneus, & lapideus, qui in vacuo eadem celeritate decidunt, tamen pondere diſcrepant, propterea quod globus lapideus maiorem quantitatem materiæ, ſeu maiorem numerum elementorum contineat, quam alter ligneus.

§. XIX.

Corollarium I. *Volumen ſeu moles* corporis differt *a maſſa* eiusdem, nam volumen æſtimatur ex magnitudine ſpatii, quod corpus occupat, ſive ex dimenſione in longum, latum, & profundum: at maſſa eſt ipſa quantitas materiæ ſub certo volumine contentæ. Bini globi, quos ſupra poſui, non volumine, ſed maſſa differunt.

§. XX.

Corollarium II. Quia diverſitas ponderis a diverſa quantitate materiæ ſeu a maſſa pendet, (§. XVIII.)

 id-

idcirco corpora eiusdem voluminis, uti pondere, ita massa differunt; ac corpus, quod sub eodem volumine præponderat, *specifice gravius* dicitur, alterum *specifice levius*, ut adeo gravitas specifica corporum æstimetur ex pondere eorundem, seu quantitate materiæ sub eodem volumine contentæ. Corpora eiusdem speciei, & eiusdem gravitatis specificæ, *homogenea* dicuntur; quæ diversæ sunt gravitatis specificæ, *heterogenea*. In corporibus heterogeneis eiusdem voluminis pondera sunt directe, uti gravitates specificæ; in corporibus homogeneis eiusdem gravitatis specificæ pondera sunt uti volumina, quod per sese liquet; igitur secundum theorema generale §. XII. pondera corporum universe sunt in ratione composita gravitatum specificarum, & voluminum; unde si literæ initiales harum adfectionum adhibentur, habetur formula $P = G\,V$. Si gravitates specificæ, & volumina binorum corporum reciprocant, pondera sunt æqualia, & vicissim si pondera corporum heterogeneorum sunt æqualia, eorum gravitates specificæ, & volumina reciprocant. Nam formula hanc continet analogiam: $P : p = G\,V : g\,u$. Si iam sit $P = p$; erit $G\,V = g\,u$; proinde $G : g = u : V$.

Diximus, pondera corporum homogeneorum esse ut volumina, ut ob gravitatem specificam constantem formula $P = G\,V$, *abeat in hanc*, $P = V$. *Porro volumina pendent a longitudine, latitudine & profunditate; siqua corpora sunt eiusdem per totam longitudinem crassitiei, volumina sunt ut factum ex basi in altitudinem: basis autem est in composita ratione longitudinis, & latitudinis, quam basis habet. Sit trabs lignea, longa pedes* 4, *lata* 3, *alta* 2. *erit volumen seu tota soliditas* $= 4 \times 3 \times 2 = 24$. *Sit alia homogenea longa pedes* 10, *lata* 4, *alta* 1, *erit soliditas* $= 40$. *Hinc dato pondere P prioris* $= 240$, *invenietur pondus posterioris; nam* $V : u = P : p$ *seu* $24 : 40 = 240 : \dfrac{40 \times 240}{24} = 400$. *Longitudo, latitudo, & altitudo relate ad volumen corporis spectandæ sunt ceu caussæ heterogeneæ; unde id crescit in ratione composita earundem (Schol. §. V.) Bases circulares*

sunt

ſunt ut quadrata Diametrorum. Sit Diameter circuli unius 5 pollic. Diameter alterius 10 pollic. Sitque area circuli prioris 19, 635 pollicum quadratorum, facile reperietur area poſterioris, ſi fiat, ut quadratum diametri unius ad quadratum diametri alterius, ita area primi ad aream ſecundi., ſeu 25 : 100 = 19, 635 : 78, 54 pollic. quadrat.

§. XXI.

Corollarium III. Ex idea maſſæ, & voluminis exſurgit idea, & menſura denſitatis. Creſcit enim denſitas creſcente numero elementorum, ſive creſcente maſſa, & decreſcente volumine ſeu ſpatio, quod ea elementa coniunctim occupant, eo fere modo, quo denſam, & confertam dicimus hominum turbam, ſi magnus eſt hominum numerus, & exiguus locus, quem occupant. Hinc ſi denſitas, maſſa, volumen exprimuntur literis initialibus, erit $D = \frac{M}{V}$, ſeu denſitas eſt directe ut maſſa, & reciproce ut volumen corporis. Raritas R eſt reciproce ut denſitas, ſive directe ut volumen, & reciproce ut maſſa, ſeu $R = \frac{1}{D} = \frac{V}{M}$.

Hæc quidem ad extenſionem, & connexas ideas pertinent; Nunc de reliquis ideis partialibus, ex quibus complexa corporis idea coaleſcit, dicendum eſt.

§. XXII.

Obſervatio. Innumeris naturæ, & artis operibus oſtendi poteſt, diviſibilitatem corporum plane enormem eſſe, & velut in immenſum ultra omnes limites non modo ſenſuum, ſed etiam imaginationis pertingere. 1. Uncia auri, inquit Muſchenbroeck olim poterat diduci in bracteas quadratas 1600, quarum latus unumquodque 3 pollicum eſt, adeoque quælibet bractea eſt 9 pollicum quadratorum; cumque pollex ſecundum longitudinem dividi poſſit in 600 partes viſibiles, quodvis bracteæ latus (quod 3 pollicum eſt) dividetur in partes viſibiles

1800. proinde quælibet bractea quadrata in partes visibiles 1800. 1800 = 3240000, & bracteæ 1600 in partes visibiles 3240000. 1600 = 5184000000; in tot igitur partes dividetur uncia auri, quæ continet grana 480; consequenter unum granum auri in partes visibiles 10800000 dividetur. Quoniam vero artifices hodierni (inquit cit. Auctor) ex grano auri bracteas $36\frac{1}{2}$ pollicum quadratorum, & 24 linearum quadratarum spargunt, poterit granum auri dividi in partes 13200000. Nempe in pollice partes visibiles sunt 600, in pollice quadrato partes visibiles 360000. In dimidio pollice quadrato partes visibiles 180000. In una linea partes visibiles 50; in linea quadrata 2500: in lineis quadratis 24 erunt partes visibiles 60000; ex quibus ea summa enascitur. 2. Unicum granum cupri in tot particulas, tamque minutas dividitur, ut volumen aquæ multis millionibus maius, quam sit volumen grani, colore imbuat. 3. Lewenhoeckius in gutta aquæ, cui in aprico stanti piperis contusi exigua portio immissa fuit, triplicis generis animalcula per microscopium observavit. Diameter minimi generis ponatur 1, erit diameter secundi generis 10, & maximi 50: diameter vero grani sabuli maioris 1000; adeoque cum totum volumen seu magnitudo sit in ratione triplicata diametrorum, erit magnitudo talis animalculi ad magnitudinem arenæ ut 1 : 1000, 000, 000. Cum iam tale animalculum corpus habeat organicum, etiam habet membra ad vitam & motus necessaria, cor, musculos, glandulas, ventriculum &c. eaque, cum pariter organica sint, instructa fibris, membranulis, tunicis, venis, arteriis, nervis &c. per quos vel sanguis manat, vel alius liquor multo subtilior iis canalibus, per quos dispensatur; ex quibus coniectura fieri potest de stupenda subtilitate lucis, quæ in organa tam exilia, tamque delicata sine læsione irruit, quemadmodum alio loco declarabitur.

Multa divisibilitatis corporum, & subtilitatis argumenta suppeditabit Physica, & passim scriptores suggerunt, ex quibus perspicuum fit, quodvis esse congeriem innumerabilium particularum materiæ. Utrum divisibilitas in infinitum pertingat, an ad simplicia denique elementa ve-

nia-

niatur, experientia decidi minime potest. Metaphysicæ autem contemplationes huc non pertinent.

§. XXIII.

Definitio II. *Impenetrabilitas*, quæ & *soliditas* aliquando dicitur, ea est corporum proprietas, ob quam eodem loco se mutuo excludunt, sive ob quam duæ pluresve materiæ partes eundem locum eodem tempore occupare nequeunt. Phœnomena, quæ compenetrationis speciem referunt, uti cum mercurius in metalla se insinuat, indicio sunt, solidissima quævis corpora, in quibus nihil interruptum sensu percipitur, plurima interstitia, & meatus, quos *poros* vocant, habere, ut adeo nullum sit omnino corpus absolute densum, sive inter cuius partes nulla interstitia relinquantur; imo quævis corpora, etsi maxime densa, incredibili pororum numero undique pertusa sunt. Hinc fieri necesse est, ut certa materiæ quantitas, per maius spatium extendatur, quam si intermedii meatus, & pori abessent; quemadmodum si inter libros, vel turbam hominum intervalla multis locis relinquantur, ab iis maius occupatur spatium, quam si exclusis iis intervallis maioribus, & sub sensum cadentibus libri, vel homines quaquaversus conferti stant. Ex his discrimen illud inter massam, & volumen corporum, de quo supra egi, evidentius perspici potest.

CAPUT IV.

De Legibus Motus Generalibus.

Mobilitas, & vis inertiæ, quæ in idea complexa corporis continentur, ex generalibus motus legibus maxime perspicientur. Hæ leges totius Mechanicæ, atque interpretationis naturæ corporeæ fundamentum sunt, & instar axiomatum passim habentur ab omnibus, etsi de natura virium multæ passim controversiæ cieantur, quas quidem hoc loco penitus eliminamus.

§. XXIV.

§. XXIV.

Lex I. *Quodvis corpus perſeverat in ſuo ſtatu quieſcendi, vel movendi uniformiter in directum, donec aliunde ſtatum ſuum cogatur mutare, h. e.* Corpus vim nullam habet ex ſe, vel per ſe *mutandi* ſtatum motus, vel quietis, ſed vim *conſervandi* ſtatum, ita, ut in quiete conſtitutum perpetuo quieſceret, donec aliunde, id eſt, a cauſſa extrinſecus adplicata a quiete deturbetur ad motum; & ſi aliquando ad motum determinatum eſſe ponitur, in eodem motu per ſeſe maneret uniformiter, & in directum, id eſt, eadem conſtante celeritate, & in eadem linea recta pergeret.

§. XXV.

Corollarium I. Si corpus directionem motus, aut celeritatem, quam habet, in maiorem, vel minorem mutat, id ab alia cauſſa proveniat, neceſſe eſt; & ſi directionem, & celeritatem continuo mutat, id a cauſſa continuo agente provenire debet; corpus enim ex ſe, & natura ſua ſtatum minime mutat. Sola quidem experientia hanc legem in natura corporea obtinere proxime non penitus evincit. At conſtans & generalis experientia oſtendit, omnis mutationis, quæ in ſtatu motus vel quietis fit, alias quaspiam eſſe cauſſas. Eiusmodi cauſſæ extraneæ, per quas celeritatem, & directionem corporum mutari videmus, veræ ſunt, iisque mutationibus explicandis ſufficiunt; non oportet igitur aliam præterea comminiſci cauſſam, neque exiſtimandum eſt, ipſa corpora veluti ſua ſponte celeritatem, & directionem aliquando mutare. Adparebit quoque ipſo progreſſu Phyſices, aſſumta hac lege motus omnium corporum, quos Mechanica terreſtris, ac cæleſtis examinat, ita explicari, ac definiri poſſe, ut obſervationes cum theoria huic legi innixa optime congruant.

§. XXVI.

Corollarium II. Ex hac iam lege idea de vi inertiæ corporum, quam Newtonus vim inſitam aliquando ad-

adpellat, formari poteſt. In omnibus corporibus per ſeſe ineſt *determinabilitas* ad utrumvis ſtatum motus, vel quietis recipiendum (quodvis enim corpus eſſe mobile oſtendit inductio; quieſcere multa nobis videntur corpora; certe exploratum eſt, quemvis motum minui poſſe magis, magisque; quocirca omnino denique extingui poterit) Et quoniam alterutrum ſtatum motus, vel quietis quodvis corpus neceſſario habet, ac per ſe conſervat, ineſt præterea in omnibus corporibus determinatio perſeverandi in eo ipſo ſtatu, qui actu adeſt, nempe in quiete, vel motu uniformiter in directum. Si hanc determinationem corporum conſervandi ſtatum, adpellamus *vim*; illam vero determinabilitatem ad utrumvis ſtatum motus, vel quietis vocemus *inertiam* corporum, poteſt hæc materiæ proprietas adpoſite dici *vis inertiæ*, quæ eſt communis corporum proprietas, & abſoluta quidem, ſive talis, quæ ex intima elementorum, ſeu materiæ natura, non ex partium compoſitione oritur; compoſitio enim nec mobilia efficit corpora, nec cur ſtatum motus, vel quietis conſervent, in cauſſa eſt.

§. XXVII.

Corollarium III. Determinatio conſervandi ſtatum motus, vel quietis, quam expoſita lex corporibus tribuit, non meram impotentiam ſtatum mutandi, ſed pluſculum quidpiam videtur indicare; ac obſervamus conſtanter, corpora non tantum ſtatum ſuum ex ſe ipſis non mutare, ſed etiam mutationi ſui ſtatus, & impreſſioni aliorum corporum reſiſtere. Nam 1. Vis minori corpori impellendo ſufficiens, ſæpe maiori movendo par non eſt. 2. Vis eadem adhibita non eandem omnibus corporibus celeritatem conciliat. 3. In conflictu corporum ex vi incurrentis ſemper aliquid decerpitur, uti, ſi globus in quieſcentem incurrit, poſt incurſum tardius progreditur. 4. Pro varia velocitate corporis in motu conſtituti varia vi opus eſt, ut ad quietem reducatur. Ineſt igitur in corporibus vis, qua in alia corpora mutationem ſtatus inducentia reagunt, quæque adpellari poteſt *vis reſiſtentiæ*. Hæc ſub nomine vis inertiæ a multis comprehenditur, ac comprehendi nunc

qui-

quidem potest citra errorem, quæcunque huius resistentiæ caussa ultima ab aliis assignetur.

Animadverti tamen potest, ideam vis resistentiæ non omnino eandem videri, ac ideam vis inertiæ, neque effectum eundem penitus esse. Nam vis inertiæ respicit conservationem status in eo corpore, in quo resìdet, quodque motum, vel quietem conservat: vis autem resistentiæ respicit corpus alterum, quod prioris statum mutare nititur: per vim inertiæ conservat corpus statum suum: per vim resistentiæ agit, vel potius reagit in aliud, quod mutationem inducit. Haud ægre, opinor, concipi potest, corpus A, dum motum suum, vel quietem per vim inertiæ conservat, eo ipso resistere, sive reagere in corpus B, quod statum mutare nititur. Sed hanc resistentiam, & actionem, mutuamque reactionem sequentes leges declarabunt.

§. XXVIII.

Lex II. *Mutatio status quietis, vel motus corporum proportionalis est vi impressæ.* Mutatio status fit, quatenus vel novus motus quiescenti corpori imprimitur, vel prior augetur, minuitur, extinguitur. Quævis eiusmodi mutatio est proportionalis vi impressæ, quatenus mutatio dupla, tripla, aut in quacunque multiplicium, vel submultiplicium serie maior aut minor gignitur, si vis impressa duplo, triplo, aut in quacunque multiplicium, vel submultiplicium serie maior, aut minor est. Æstimatur autem vis impressa, & mutatio status non ex sola celeritate, quæ in corporibus producitur, augetur, minuitur, vel extinguitur, sed ex celeritate ducta in massam, sive ex facto massæ in celeritatem, quæ dicitur *quantitas motus.* Nam magnitudo, & quantitas mutationis status pendet tum ex multitudine partium, quarum status una mutatur, tum ex celeritate communi, quæ in singulis producitur, augetur, minuitur, extinguitur. Si massa eadem est, seu constans, celeritas autem in ratione dupla, vel tripla crescit, etiam quantitas motus, & mutationis status censetur duplo, vel triplo minor; vel si celeritas ponatur constans, & æqualis; una autem massa A sit du-

dupla, vel tripla massæ B, etiam quantitas motus & mutationis status in massa A est dupla, vel tripla illius quæ est in massa B. Hinc quantitates motuum crescunt' ut massæ, & celeritates coniunctim, sive exprimendo easdem per literas initiales, Q = M C.

Sit quantitas motus in corpore A = Q; eius massa M = 3. Celeritas C = 6. Quantitas motus in corpore B = q; eius massa m = 4, celeritas c = 2; erunt quantitates motus, seu Q: q = M C: m c = 18: 8 = 9: 4. Unde nascitur formula Q = M C, in qua eæ variationes habent locum, quas indicavimus §. XV. Si massæ, & celeritates reciprocant, quantitates motus sunt æquales. ibid. n. VI.

§. XXIX.

Lex III. *Actioni corporum contraria semper, & æqualis est reactio*, sive in collisione & conflictu corporum æquales status mutationes utrinque contingunt, ut, quæ motus quantitas uni corpori adiicitur, eadem alteri detrahatur. Hinc vis impressa, qua corpus A agit in B, est æqualis vi resistentiæ corporis B, sive quantum corpus A mutat statum corporis B, tantundem corpus B mutat statum corporis A. Moveatur corpus A versus orientem, & impellat aliud corpus B quiescens vi impressa ut 4, qua in corpore B producitur mutatio status, sive quantitas motus ut 4; quoniam huic actioni contraria, & æqualis est reactio; hinc corpus B eadem vi ut 4 resistet, sive parem motus quantitatem in corpore A producet, sed in partem contrariam, nempe versus occidentem.

§. XXX.

Corollarium I. Mensura vis impressæ, seu actionis est quantitas motus in corpore impulso producta; & mensura resistentiæ sive reactionis est quantitas motus in impellente elisa, sive quantitas motus in eodem producta secundum directionem priori contrariam; idque locum habet non modo in actuali motu, & percussione, sed etiam conatu, & nisu ad motum, siquis adest in dato corpore, & impressione. Si digito premo

aliud

aliud corpus iners, & immobile, satis sentio in digito pressionem reciprocam, sive repressionem, eoque maiorem, quo maior est mea pressio. Idem fit, si corpus quiescens manu percutiam, vel in motu iam constitutum ad quietem redigam, aut etiam ad maiorem celeritatem determinem; nam quoad excessum celeritatum perinde resistit, ac reagit, ac si quiesceret.

§. XXXI.

Corollarium II. Quodvis igitur corpus, quod in alterum agit percutiendo, seu premendo, semper invenit resistentiam suae actioni aequalem, & quando nulla est resistentia, nullumque obstaculum, nulla concipitur actio corporum mutua. Si equus trahit lapidem funi alligatum, funis non modo tenditur ab equo, sed pari ratione ab ipso etiam lapide, haud secus, ac si alia vis aequalis resistentiae lapidis funem retraheret, & positive contra equum reageret; ac si funis manu tensus circa medium scinditur, pars una versus manum, altera versus obstaculum resilit, quod non fieret, si funis duntaxat versus manum, non etiam versus obstaculum tenderetur. Si quod corpus elasticum comprimitur, flectitur, tenditur, uti vesica inflata, vel arcus, reactio, & resistentia elaterii semper aequalis est vi comprimenti, flectenti, vel tendenti. Si enim resistentia esset minor, id corpus magis cederet, magisque comprimeretur, flecteretur, vel tenderetur: si esset maior, non tantum comprimeretur, quantum reipsa ponitur. Si quod corpus movetur in fluido, uti si lapis per aerem, vel aquam decidit, eiusdem motus continuo impeditur, & hebetatur; quia progredi in fluido non potest, nisi eiusdem particulas suis locis exturbet, iis proin motum communicet, ac de suo motu ob reactionem partium fluidi aliquid amittat.

§. XXXII.

Corollarium III. *Obex immobilis* censetur, qui omnem vim alterius corporis incurrentis, vel ad motum tendentis sustinet, sive cuius resistentia superari nequit. Hinc

Hinc bina corpora æqualibus & oppofitis viribus congreffa perinde fe habent, ac fi quodvis refpectu alterius effet obex immobilis, quia alterum alterius vim totam fuftinet.

Etfi actioni femper æqualis & contraria fit reactio, tamen inferri nequit, inter corpus agens & patiens omnem motum femper elidi, & æquilibrium quoddam virium concipi debere. Nam fi e.g. equorum currum trahentium vis maior eft ea vi, qua currus, & fcabrities plani equis refiftit, motus five ipfa translatio fit ea parte virium, quæ poft fuperatam refiftentiam refidua eft; igitur æqualitas actionis, aut reactionis duntaxat denotat, ab agente non maiores, aut minores impendi vires ad fuperandam refiftentiam, quam fit ipfa refiftentia, aut vires refiftentiarum omnium, nam corpus unum in alterum non femper agit tota fua vi, fed vi tanta precife, quanta eft alterius refiftentia.

Scholion Generale.

Qui Newtonianas philofophandi regulas recte expendit, indeque primam corporis naturalis ideam collegit, qui dein generales motuum leges, quæ inftar axiomatum funt, ac modum rationes quantitatum exprimendi, tractandique formulas comprehendit, fatis opinione mea ad ipfam percipiendam Mechanicam ceu primam Newtonianæ Phyficæ partem accinctus iam eft. Vis quidem, & veluti falubritas regularum Newtoni ipfo progreffu magis magisque fentietur, & a nobis poft expofitam generalem corporum attractionem pluribus exemplis & animadverfionibus exponetur. Nunc de reliquis, quæ adhuc tractanda funt, quædam adnotanda videntur.

I. In primis curandum, ut theorema generale, quod pro rationibus quantitatum determinandis demonftravimus, penitiffime intelligatur, ut ab eiusdem ufu, qui frequentiffimus eft, omnis pellatur obfcuritas. In hunc finem exercitationes ex Arithmeticorum libris, quorum ingens copia paffim in manibus eft, petendæ funt; quævis enim res, cuius valor, aut magnitudo ab aliis

C ceu

ceu menſuris pendet, & per regulam auream directam vel inverſam, ſimplicem vel compompoſitam exponitur inſtar effectus conſiderari poteſt: eæ menſuræ vero inſtar cauſſarum.

II. Proprietates generales corporum inductione collectas, ex quibus complexa earundem idea coaleſcit, recenſui C. III. nempe extenſionem, diviſibilitatem, impenetrabilitatem, mobilitatem, & inertiam. Hinc corporis nomine non elementa eorundem ſimplicia, & indiviſibilia, ſed elementorum plurium inter ſe quaqua ratione cohærentium, quæ certas maſſulas conficiunt, congeriem denoto, ut multi alii hac ætate Philoſ. Sunt tamen, qui illa etiam elementa, quæ omni carent compoſitione, & in partes reales ſecari nequeunt, corpuſcula vocent, vel atomos, quaſi inſectilia; unde *corpuſcularia*, & *Atomiſtica* Philoſophia nomen traxit. Extenſio corporum, de qua egi, ſimul *phyſica* eſt, quæ ex elementis ob impenetrabilitatem extra ſe poſitis, at cohærentibus oritur, ſimul *Mathematica*, quatenus trinam dimenſionem admittit. Hanc Mathematicam extenſionem Krafftius extenſionis phyſicæ baſin adpellat, propterea generatim ideam extenſionis a ſpatio diviſibili & ſecundum trinam dimenſionem extenſo petamus, uti in Phil. Prima animadverti.

III. Ab extenſione phyſica oritur corporum diviſibilitas; neque enim ex elementorum idea, ullave alia cauſſa intelligi poteſt, plura elementa reipſa inter ſe diſtincta vi eſſentiæ ita cohærere, ut ſeparari nulla ratione poſſint. Imo generalis corporum mobilitas, & indifferentia ad omnem locum, ſitumque, quæ eſt ab ſoluta eorundem proprietas ex natura elementorum, non ex compoſitionis modo dimanans, eam nobis certam opinionem ingerit, quidquid partibus realibus conſtat, id eſſe abſolute diviſibile, etſi fortaſſis quædam extent moleculæ corporum, compoſitæ illæ quidem ex pluribus elementis, ſed quæ nulla naturæ vi dividi, vel mutari queant, ob quas deinde eædem corporum ſpecies in hoc univerſo perpetuo conſerventur, quaſque *primigenias* plerique adpellant. Pro explorato habendum eſt, eam molecularum multo maiorem eſſe

ſubti-

ſubtilitatem ; & in rariſſimis etiam corporibus numerum longe maiorem , quam imaginatione humana comprehendi queat. Cuius rei ſpecimina quædam ſupra collegimus maxime a ductilitate auri in tenuiſſima folia redacti , quorum uno ſi obducatur craſſius argenti filum , tum id diſtendatur in immanem longitudinem ad ſummam tenuitatem redactum , adhuc totum inauratum cernitur. Unico croci vel ſacchari toſti grano maximam aquæ copiam colore flavo tingimus. Pariter a tenuiſſima æruginis maſſula , quæ eſt quoddam ſalis virentis genus , immanis aquæ moles virorem contrahit. Plures exiguæ molis ſubſtantiæ longiſſimo tempore odorem emittunt , & ſpatia longe a ſe disiuncta inficiunt ſine ſenſibili ponderis imminutione. Parvitas animalium organicorum tanta eſt , ut quam plurima eorum millia per granum piperis liberrime excurrere , & vagari poſſint. De ſpatii , ac temporis divisibilitate infinita alibi diſſeremus ; nunc illud colligendum , ut caveamus diligenter , ne craſſis ſenſibus metiamur quidvis , & quæ palpari manibus , & videri oculis non poſſunt , ea propterea omnino non eſſe arbitremur ; quæ res progreſſibus ſanæ philoſophiæ plurimum , & multo tempore adverſata eſt. Dein patet , multos , & varios eſſe particularum , ex quibus corpora componuntur , ordines ; prima enim elementa inter ſe coniuncta moleculas efficiunt , quas diximus , primigenias figura , maſſa , diſtributione elementorum , volumine , & probabiliter etiam viribus magnopere diſcrepantes , totaque ſpecie diverſas : ſingulæ iſtarum ſpecies iterum combinantur diverſis poſſibilibus modis , & moleculas *ſecundi ordinis* , ac ſpecies denuo diverſas conſtituunt ; ac ſimili modo fit tertius , & quartus ordo , atque ita deinceps , donec maſſa evadat ſenſibilis , id eſt , quæ organa ſenſuum noſtrorum ſingilatim ſatis adficere poſſit. Confirmat hosce ordines molecularum id , quod in ſanguine omnium animalium microſcopio inſpecto obſervatur ; conſtat enim is globulis rubicundis , quorum ſinguli in ſex alios flaveſcentes , ac ſeroſos , & horum quivis in alios lymphaticos ſex diſſolvitur. Multorum ex hocce ordine molecularum explicatio phœnomenorum pendet , uti quod Chalybs igne duratus ſit durior alio non durato,

 ſed

ſed a minore pondere adpenſo dirumpatur; id enim fieri neceſſe eſt, ſi ignis maiorem particularum ordinis inferioris ad ſe acceſſum, & coherentiam firmiorem efficiat, ob quam magis reſiſtant limæ, & maiorem duritiem prodant: at particulæ maiorum ordinum minus, ac antea cohæreant, proindeque minore adpenſo pondere ſeparentur. Ex his illud concludes, quod Staius L. I. Phil. Rec. a. v. 1401 animadvertit, inepte facere eos, qui integris corporibus necdum ſatis perſpectis plurimos minorum particularum ordines minime exploratos prætermittunt, & ſaltu quodam in intimam rerum ſubſtantiam, ac elementorum naturam penetrare geſtiunt; quam quidem rem plenam fore periculi ait, ut ubi arcibus intermediis a tergo prætermiſſis ad invadendam urbem regni caput illico cum omni exercitu, dux rei militaris imperitus ſe conferat.

IV. Ad corporum extenſionem, cum ea limites habeat, *figura* eorundem pertinet, ad diviſibilitatem vero, & mobilitatem *figurabilitas*, ſive capacitas recipiendi diverſas figuras manente eadem maſſa. Quocirca ſuperficies corporum, volumen ſeu moles, ac maſſa plurimum differunt. Si cubum cereum ſumas, cuius ſingula latera ſint duorum pollicum, ſuperficies quævis 4 continebit pollices quadratos, & ſuperficies totius cubi 24 poll. quadr. At moles 8 pollices cubicos continet. Pone hunc cubum mutari in parallelepipedum, cuius baſis ſit unius pollicis quadrati, longitudo vero 8 eiusmodi pollicum, erit ſuperficies tota 34 pollicum quadr. manente eadem maſſa, & numero pollicum cubicorum. Si corporum figuræ ſimiles ſunt, moles eorundem in triplicata ratione laterum homologorum, ſuperficies in duplicata creſcit, ut ſi cubi ponatur latus duplo, triplo, vel decuplo maius, erit ſuperficies quadruplo, noncuplo, centuplo maior, at moles ſeu volumen octo, viginti ſeptem, mille vicibus maior. Conf. Schol. §.XX.

V. Menſura denſitatis, ac raritatis corporum ex hydroſtatica determinabitur. Maſſam dixi numerum partium minimarum, vel elementorum, verbo, quidquid ad corporis conſtitutionem pertinet; ſed id ipſum valde incertum eſt, vagumque, quia plurimæ ſubſtantiæ

val-

valde dissimiles ac peregrinæ in corporum poros penetrant. Id in corporibus animalium, plantis, & lapidibus plerisque etiam oculis patet; in cæteris idem Chymia exhibet. Aer meatus plurium corporum permeans, & siqua est aere subtilior substantia, ad corporis constitutionem non videtur pertinere, uti nec aqua spongiæ, cuius poros occupat, pars est; idem tamen aer ad fixam naturam redactus, uti Hallesius demonstrat, multas substantias regni animalis, & vegetabilis magnam partem constituit: aliæ quoque substantiæ volatiles in corporum dissolutione Chymica in fumos, & halitus abeunt: sanguis & lymphæ variæ in corpore animali, succi nondum concreti in plantis sine dubio ad constitutionem eorum corporum pertinent. Quapropter ne penitus vaga sit massæ æstimatio, ea ex pondere determinatur, ut quidquid corpus instar partis constituere cernitur, & cum illo gravitat, massæ nomine veniat: hæc ipsa autem massa alia constans est, alia variabilis, uti cum humores maiore aut minore copia corpora obsident.

VI. *Soliditatis* vox aptior quibusdam videtur ad exprimendam vim illam, seu proprietatem constantem, qua se corpora ex eodem loco excludunt mutuo, quam impenetrabilitatis nomen, quod duntaxat negativum quid præ se fert. Eius idea, uti & extensionis iam inde ab utero materno nobis videtur ingeri, & constanter firmatur in animo, cum quodvis corpus premimus, tangimus, percutimus. Si in corporibus nihilo plus resistentiæ sentiremus, quam exhibet imago a cavo speculo reddita & in aere pendula, extensionis, non item soliditatis in nobis idea foret. Nunc vero dubium non est, eam omnibus plane corporibus competere, nec inductioni obest permixtio liquorum, vel penetratio eorundem in corpora solida; hæc enim porositati potissimum adscribenda est, uti cum aqua in sensibiles spongiæ poros insinuatur. Id generale est huius generis inductionibus omnibus, ut, si aliqua proprietas in plurimis casibus observetur: in aliis vero, ubi contrarium videtur evenire, apta ratio in promtu sit, qua cum illa proprietate contrarii casus conciliari queant, inductione standum sit, etsi positive probari non semper

 pos-

possit, rem in iis casibus contrariis ita se habere. Sed hoc quidem loco ratio petita a corporum porositate perquam manifesta est; quævis enim corpora in tenues lamellas secta lucem per poros transmittunt: pariter igne incalescunt omnia, substantia ignea per meatus irrumpente: si foramini cameræ obscuræ digitus obiicitur, ipse adeo pellucidus adparet: Mercurius uti per metalla omnia excepto ferro; ita humanam quoque cutem, & corium quodcunque penetrat: aqua non modo spongiam, sed omnes membranas animalium, omnes partes vegetabilium, item saccharum, salia, cineres intrat, & facta pressione vel contusione per poros cupri, stanni, plumbi, auri quoque maxime solidi exsudat. Si in tubum vitreum continentem oleum vitrioli infundas aquæ cylindrum, cuius altitudo in eo tubo explorata tibi sit, sedata effervescentia minor observatur altitudo, ac summa eorum liquorum exigit. Spiritus fumans sulphureus volatilis argentum multis etiam linteis obvolutum tingit colore fusco. Porro rationem, cur liquores iidem alia corpora permeent facile, & cito, alia non item, vel tempore longiori, non a sola pororum, aut particularum fluidi figura, magnitudine aut proportione quadam pendere alio loco ostendemus; sed nempe leges mechanicæ a viribus inertiæ potissimum pendentes ante exponendæ sunt, quam decidi queat, aliæne præterea, aut quales in natura vires extent.

VII. Leges generales motus quanti usus, ac momenti sint, tota mechanica faciet palam. Æqualitatem actionis & reactionis ubivis deprehendimus. Si malleo ferreo vitrum percutiam, ictus tam in malleo, quam vitro recipitur; neque frangitur vitrum, quod maior vis percussionis eidem insit, quam malleo, sed quod partibus minus cohærentibus constet; si vitro aliove fragili corpore percutiam incudem, vitrum frangetur, seu corpus percutiens. De corporum inertia plura exempla colligemus aptiore loco. Nunc illud observandum, plerosque omnes non modo conservationem status, verum & resistentiam, quæ fit in mutatione status aliunde inducta, vi inertiæ adscribere. Krafftius in Præl. Acad. P. I. §. 41. inertiam adpellat *vim corpori insitam resistendi cuivis mutationi*; ac §. 84 *eandem prin-*

principium esse ait resistendi omni mutationi status sui, ex quo nomen cuiusdam vis meretur. Eadem cum sit absoluta proprietas, crescit crescente numero elementorum, & cæteris paribus massæ proportionalis est.

SECTIO II.

De Motu Corporum Rectilineo.

CAPUT I.

De Motu Simplici, & Æquabili.

Expositionem theoriæ motuum a simplicissimo motus genere, & planissimis principiis in Mechanica ordimur, a quibus paulatim ad intricatissimos motus etiam corporum cælestium, maximeque complicata naturæ phænomena explicanda perventur. Quapropter non leviter percurrenda hæc tractatio est, etsi perfacilis captu sit.

§. XXXIII.

Definitio I. Motus *simplex* est, qui ab unica oritur vi impressa, seu determinatione: *compositus*, qui a pluribus. Eiusmodi motus secundum primam generalem legem §. XXIV. fit in directum, sive continuatur per eandem lineam, per quam vis imprimens tendit, idemque est uniformis, sive *æquabilis*, quo nimirum intra æquale tempus semper æquale spatium, tempore duplo, vel triplo spatium duplum, vel triplum conficitur. Ex qua notione manifestum est, in motu æquabili seu uniformi spatia esse temporibus proportionalia.

§. XXXIV.

Definitio II. Ut errorum, & æquivocationum periculum vitetur, duplex distinguenda est corporum ce-

leritas, primo *actualis*, cuius idea est relativa, & in relatione spatii percursi ad tempus, quo illud percurritur, sita est. Hæc actualem motum, quo certo tempore certum spatium conficitur, involvit, nec unico momento haberi vel concipi potest, sed tempus quoddam continuum exigit. Secundo *potentialis*, sive ea, quæ in mobili inesse concipitur, determinatio percurrendi certum spatium certo tempore, nisi quid obstet. Hæc determinatio singulis momentis, intra quæ motus durat, corpori inesse, sive præsens esse concipitur.

Quando de celeritate sermo est, fere actualis, non potentialis intelligi solet, quemadmodum a nobis deinceps intelligetur.

§. XXXV.

Propositio. *Celeritates corporum in motu æquabili sunt in ratione composita ex directa spatiorum, & reciproca temporum.* Patet ex notione celeritatis, quæ involvit relationem spatii ad tempus, ita, ut crescat crescente spatio, & decrescente tempore; quare secundum theor. general. §. XII. erit directe ut spatium, & reciproce ut tempus, ut sit $C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$, unde formula fit $C = \frac{S}{T}$.

Vulgo etiam velociter moveri dicitur, qui brevi tempore magnum spatium percurrit; tarde, qui longo tempore spatium exiguum; velocitas igitur ea adfectio est, quo certo tempore certum spatium percurritur; ut autem mensura quædam celeritatis habeatur, concipiendum est, motum esse æquabilem, sive celeritatem durante motu, qui celer, vel tardus dicitur, manere constantem. Sit $S = 12$. $T = 4$. $s = 10$. $t = 5$, *erit* $C : c = \frac{12}{4} : \frac{10}{5} = 3 : 2$. *Si mobile A conficit quinque leucas intra tres horas, & mobile B novem leucas intra quatuor horas, erit celeritas primi ad celeritatem secundi, ut* $\frac{5}{3} : \frac{9}{4}$. *Vel si unus intra 4 dies conficit 12 milliaria, alter intra 5 dies 10 milliaria, erit celeritas primi ad celeritatem secun-*

ſecundi ut 3 : 2. Et ſi A intra 8'' conficit 1800 pedes, & B intra 5'' pedes 600, erunt celeritates, ui 15 : 8.

§. XXXVI.

Corollarium I. Quia $C = \frac{S}{T}$, idcirco ſi ſpatium eſt conſtans, erit $C = \frac{1}{T}$, & ſi tempus eſt conſtans, erit $C = S$, h. e. Si ſpatia confecta ſunt æqualia, celeritates, ac tempora reciprocant; & ſpatia æquali tempore motu æquabili percurſa ſunt ut celeritates. Si tabellarius A ſingulis diebus conficit 6 leucas, & tabellarius B ſingulis diebus 8 leucas, erit celeritas A ad celeritatem B ut $6 : 8 = 3 : 4$.

§. XXXVII.

Corollarium II. Ex formula $C = \frac{S}{T}$, fit $CT = S$ (§. XVI. n. 1.) hoc eſt, ſpatia motu æquabili confecta ſunt in ratione compoſita temporum, & celeritatum. Si celeritas ponitur conſtans, erit $S = T$, h. e. Spatia eadem celeritate confecta ſunt, ut tempora; & ſi tempus eſt conſtans, erit $S = C$, ſive ſpatia eodem tempore percurſa motu æquabili ſunt ut celeritates. Si autem celeritates, ac tempora reciprocant, ſpatia confecta ſunt æqualia; nam $S : s = CT : ct$; ex hyp. $C : c = t : T$, ac proin $CT = ct$; igitur & $S = s$.

Sit $C = 6$. $T = 9$; $c = 18$, $t = 3$; erunt ſpatia utrinque 54, id eſt, æqualia; nam $6 : 18 = 3 : 9$. At ſit $C = 3$, $T = 2$; $c = 7$, $t = 5$. erit $S : s = 6 : 35$.

§. XXXVIII.

Corollarium III. Ex formula $C = \frac{S}{T}$, fit $T = \frac{S}{C}$, h. e. tempora motus æquabilis ſunt in ratione compoſi-

ta ex directa ſpatiorum, & reciproca celeritatum; ac ſi ſpatia confecta ſunt eadem, erit $T = \frac{1}{C}$, ſi ſpatia confecta ſunt æqualia, tempora ſunt reciproce, ut celeritates; & ſi celeritas eſt conſtans, erit $T = S$, tempora directe ut ſpatia.

§. XXXIX.

Corollarium IV. Quia $C = \frac{S}{T}$, & $Q = M.C$, ac proin $C = \frac{Q}{M}$ §. XVI. n. III. erit $\frac{S}{T} = \frac{Q}{M}$, & $\frac{MS}{T} = Q$, h. e. Quantitates motus ſunt in ratione compoſita ex directa maſſarum, & ſpatiorum, & reciproca temporum.

Sit $M = 3$. $S = 12$. $T = 4$; *&* $m = 7$. $s = 10$. $t = 5$. *erit* $Q : q = \frac{3 \cdot 12}{4} : \frac{7 \cdot 10}{5} = 9 : 14$.

Ex formula $Q = \frac{MS}{T}$, *ſi unus terminus comparationis ponitur conſtans, tres aliæ formulæ progignuntur, ut adeo 4 ſint formulæ de quantitate motus; eodem modo deducuntur 4 formulæ de maſſis, 4 de ſpatiis, 4 de temporibus, ut univerſe, cum quatuor adſint literæ, 16 formulæ ceu totidem nova theoremata habeantur. De celeritate ſupra habuimus tres formulas poſito uno termino comparationis conſtante, tres de ſpatio, & tres de tempore, univerſe 9 theoremata, quæ ope calculi literalis paucioribus prope literulis demonſtrantur, quam alii, qui de ſingulis ſingulas demonſtrationes ſine ſubſidio eius calculi conficiunt, paginis indigent. Omnes autem hæ formulæ ex una fundamentali oriuntur, vel ex combinatione plurium fundamentalium, ut adeo, cum formula fundamentalis ipſa ſe vi notionis, aut demonſtrationis offerat, citra incommodum reliquæ mente teneri poſſint.*

§. XL.

§. XL.

Corollarium V. Quemadmodum omnis quantitas geometrice per dimenſionem quandam e. g. per lineas, aut figuras exhibetur; ita ſi tempus exhibetur per unam lineam, celeritas per aliam normaliter adplicatam, ſpatium exhibebitur per rectangulum, eritque ſpatiorum ratio eadem, quæ rectangulorum; & ſicut bina rectangula æqualia ſunt, ſi baſes, & altitudines reciprocant; ita & ſpatia eadem erunt, ſi celeritates ſunt reciproce ut tempora, quemadmodum indicavimus cor. II. §. XXXVII.

§. XLI.

EXERCITATIO DE MOTU ÆQUABILI.

Problema I. *Data velocitate unius mobilis una cum velocitate alterius, & datis intervallis temporum, ac locorum, a quibus incipiunt moveri, determinare tempus, quo conveniunt.* Moveantur globi A & B verſus C. Tab. I. Fig. I. Sit ea velocitas globi A, ut intra 1'' conficiat 10 ped. Velocitas globi B, ut intra 5'' conficiat 24 ped. Globus B autem uno minuto. ſive 60'' prius moveri cæpit, & initio motus ſui 10 pedibus iam propior eſt metæ C, in qua concipiuntur convenire. Sit x tempus, quo movetur globus A, qui magis diſtat, & tardius motum inchoat. Erit tempus, quo movetur globus B $= x + 60''$. Spatium ab utroque confectum erit ut celeritas ducta in tempus, ſecundum formulam $S = C\,T$. Igitur ſpatium globi $A = 10 \times x$. & ſpatium globi $B = \frac{24}{5} \times 60 + \frac{24}{5} \times x$. Manifeſtum eſt, ſi a diſtantia vel ſpatio a globo A remotiore confecto ſubtrahatur intervallum datum $AB = 10$ ped. fore ſpatia a globis conficienda, donec conveniunt, æqualia. Igitur erit $10x - 10 = \frac{24}{5} \times 60 + \frac{24x}{5}$. Unde facta reductione ſecundum prima elementa calculi literalis fit $x = 57\frac{4}{13}$, quod in minutis ſecundis exprimit tempus, poſt quod globi conveniunt.

§. XLII.

§. XLII.

Corollarium I. Problema generale facile adplicatur ad particulare: *Si sol quotidie unum gradum conficit, luna autem tredecim, & tempore quodam sol ponatur in principio cancri, atque post 3 dies luna in principio arietis, quaeritur tempus coniunctionis proxime futurae.* Est igitur celeritas solis = 1, lunae 13. Distantia locorum ab ariete ad cancrum per 3 signa = 90°. Intervallum temporis = 3. Sit tempus, quo ab ariete luna ad metam coniunctionis accedit, = x. Erit spatium a luna confectum 13 x, spatium a sole confectum x + 3. Si a spatio remotioris subtrahatur locorum distantia, ea spatia reducentur ad aequalitatem; unde fit

$$13\,x - 90 = x + 3$$

$$93 = 12\,x$$

$$x = 7\tfrac{3}{4}.$$

§. XLIII.

Corollarium II. Multo facilius tempus, quo bina mobilia conveniunt, reperitur, si nullum est intervallum locorum, sed solius temporis. Ponatur enim quispiam Augusta Romam abiisse, qui singulis diebus conficit 6 milliaria; eodem post biduum pergit alius, qui diebus singulis conficit 8 milliaria, quaeritur tempus x, post quod hic illum adsequetur. Erit spatium primi $= 6 \times 2 + 6 \times x$. Spatium secundi $= 8\,x$. Adparet haec spatia ab utroque confecta, cum convenerint esse aequalia, unde reperitur $x = 6$. Hoc est, post 6 dies posterior adsequetur priorem.

§. XLIV.

Corollarium III. Iisdem datis, quae in problemate indicata sunt, invenire spatium a remotiore, vel propiore conficiendum, donec conveniant. Facile id quidem reperitur invento tempore, quo elapso conveniunt;

niunt; cum enim motus ponatur æqualibilis, ac proinde ſpatia in eodem mobili ſint ut tempora; fiat in caſu problematis analogia: globus A intra $1''$ conficit 10 pedes, intra $57\frac{4}{13}$ quot pedes conficiet, nempe $573\frac{1}{13}$. Pariter in caſu coniunctionis ſolis & lunæ fiat analogia: luna intra 1 diem conficit 13°, quot gradus intra dies $7\frac{3}{4}$ conficiet? nempe $100\frac{3}{4}$, h. e. ab eo tempore, quo luna fuerit in principio arietis, nimirum poſt triduum, luna debebit emetiri 3 ſigna, ſive 90°, & præterea $10\frac{3}{4}$ grad. Coniunctio igitur fiet in $10\frac{3}{4}$ gradu cancri. Denique in caſu coroll. II. is, qui ſingulis diebus conficit 8 milliaria, intra 6 dies conficiet 48.

Eſt alia quoque ratio inveniendi ſpatii a remotiore confecti, ſi tempora reducuntur ad æqualitatem. In caſu coroll. II. dicatur ſpatium conficiendum ab eo, qui tardius iter ingreditur x; cum ſit $T = \frac{S}{C}$; *erit tempus eiusdem* $\frac{x}{8}$. *Tempus alterius* $\frac{x}{6}$. *Si differentia data temporis addatur breviori, nempe ei mobili, quod tardius iter ingreditur, tempora fient æqualia; unde fit* $\frac{x}{8} + 2 = \frac{x}{6}$ *&* $x = 48$. *In caſu coniunctionis ſolis & lunæ; cum hæc longius a meta diſtet, dicatur hæc diſtantia x; erit diſtantia ſolis a loco coniunctionis* $x - 90$. *Porro quia luna intra diem conficit* 13°, *erit tempus, quo conficit ſpatium* $x = \frac{x}{13}$, *& tempus quo ſol conficit ſpatium* $x - 90 = x - 90$. *Cum epocha motus lunaris ſit ſerior, differentia temporum, ut evadant æqualia, addenda eſt ad tempus lunæ; unde fit* $\frac{x}{13} + 3 = x - 90$; *factaque reductione reperitur x ſeu ſpatium a luna*

luna conficiendum $100\frac{1}{4}$ *ut supra. Eodem modo solvitur celeberrimum problema de Achille, & testudine. Ponatur Achilles integro milliari distare a testudine, & percurrat intra horam milliare unum; testudo autem, cum centuplo minorem habeat celeritatem, intra horam duntaxat* $\frac{1}{100}$ *milliaris conficiat; quæritur spatium x, quod emetiri Achilles debet, donec testudinem adsequatur. Achilles 1 milliare conficit hora 1: igitur spatium x conficiet tempore x; nam* $1 : 1 = x : x$. *Contra spatium a testudine conficiendum est* $x - 1$. *Quæratur tempus, quo hoc spatium emetitur;* $\frac{1}{100}$ *milliaris conficit hora* 1: *igitur spatium* $x - 1$ *conficiet tempore* $x - 1 : \frac{1}{100} = 100x - 100$. *Hæc tempora, cum testudo & Achilles una incipiunt moveri, sunt æqualia: consequenter* $x = 100x - 100$; *&* $99x = 100$; $x = \frac{100}{99} = 1\frac{1}{99}$ *hoc est, Achilli percurrendum est unum milliare, & nonagesima nova milliaris pars, donec testudinem adsequatur.*

§. XLV.

Problema II. *Data velocitate unius mobilis unacum tempore ab initio motus elapso, donec alterum moveri cœperit, invenire velocitatem ab alio adhibendam, ut dato tempore illud prius adsequatur.* Viator singulis diebus conficit 6 milliaria $= a$; alius post dies $4 = c$ idem iter ingreditur, quæritur, quot milliaria x absolvere debeat diebus singulis, ut priorem adsequatur intra dies $12 = b$. Cum ab utroque mobili conficiendum sit idem iter usque ad concursum, habetur æquatio ex æqualitate spatiorum, quæ exprimuntur per C T. Erit igitur spatium primi $= a \times c + a \times b$. Spatium secundi $= b\,x$. Proin $a\,c + a\,b = b\,x$, & $x =$

$$\frac{a\,c + a\,b}{b} = \frac{24 + 72}{12} = 8.$$

§. XLVI.

Problema III. *Datis velocitatibus duorum mobilium, ac dato intervallo locorum, quo distant, & intervallo temporis, quo ex oppositis partibus versus se congrediuntur,*

tur, invenire tempus, quo sibi occurrunt. Tale Problema Newtoni, quod inter 16 arithmetica problemata est quintum ordine in hanc sententiam: Si duo tabellarii A, & B 59 milliaribus distantes tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria 2 horis, & B 8 milliaria in 3 horis; ac B una hora tardius iter instituit, quam A, quæritur primo tempus, quo elapso sibi occurrunt, dein longitudo itineris, quod A conficiet, antequam conveniat B. Manifestum est, spatia ab utroque confecta, si sibi addantur, esse æqualia dato intervallo locorum: ea autem spatia inveniuntur ducendo datam celeritatem in tempus x, quo utrumque in motu est, ac præterea celeritatem alterius, quod præ altero motum inchoavit, ducendo in tempus datum, quo præcessit. Igitur spatium quod A conficit tempore x, erit $\frac{7x}{2}$, & præterea pars spatii, quam confecit una hora citius inchoando motum erit $= \frac{7}{2}$ nam si intra 2 hor. conficit 7 milliaria, intra 1 hor. conficiet $\frac{7}{2}$. Spatium autem confectum a B erit $\frac{8x}{3}$ secundum formulam $S = C\,T$; est autem hic $C = \frac{8}{3}$, & $T = x$. Consequenter fit $\frac{7}{2} + \frac{7x}{2} + \frac{8x}{3} = 59$, & $x = 9$ hor. quibus una moventur; proin tempus totum, quo movetur $A = 10$; ex quo reperitur longitudo itineris ab A conficiendi, donec adsequatur B; nam $2 : 7 = 10 : \frac{70}{2} = 35$. Spatium confectum a B erit $59 - 35 = 24$.

CAPUT II.

De Resolutione, & Compositione Motuum, Viriumque.

Motum compositum hic considero eum, qui ex binis oritur viribus impressis, quæ vires componentes vocantur; facile enim ad

ad plures vires, aut quotcunque datas dicta transferri poterunt. Inscribitur autem hæc expositio de resolutione, & compositione motuum, propterea quod compositio eorundem sine resolutione satis explicari nequeat opinione mea, quemadmodum mox ostendam.

§. XLVII.

Definitio. Si motus cuiusdam puncti refertur ad diversas plagas, vel diversa plana, a quibus punctum mobile distantias suas mutat eodem tempore, & per eundem motum, is motus dicitur *resolvi.* Est igitur resolutio motus nihil aliud, nisi relatio distantiarum puncti mobilis ab aliis, atque aliis planis lineis expressa. Hæc definitio, etsi pro arbitraria sumi possit, tamen veritate nititur, & ex genuina loci, motusque notione deducta est. Incedat enim (Tab. I. Fig. II.) punctum P per rectam P O; dico eius motum non modo ad planum M N, quod ad directionem P O normale est, sed etiam ad plana A B, S V &c. referri posse, atque eo ipso in plures alios motus resolvi. Nam punctum, quod movetur, seu locum mutat, distantiam a diversis planis, quæ circumposita sunt, vel concipi possunt, eodem tempore non mutat eodem modo. Dum enim ex P venit in O, ad planum M N accessit spatio P O, ad planum A B spatio P D, ad planum S V spatio P C; sicut igitur distantiæ puncti, dum est in P, ab hisce planis diversæ sunt, ita per eundem motum ex P in O diverso modo mutantur. Si igitur motus P O refertur ad plana S V, & A B, is dicitur resolvi in motus P C, & P D; quæ exprimunt spatium, per quod punctum P per motum P O ad ea plana accessit; nam distantiam inter punctum P, a quo mobile discessit, & datum planum S V, vel A B ad quod accessit, metitur linea ex eo puncto ad datum planum normalis, quæ sola est determinata mensura spatii confecti; cum infinitæ obliquæ lineæ magnitudine differentes ex aliquo puncto ad idem planum duci queant.

§. XLVIII.

Corollarium I. Quoniam vis *eiusdem* corporis seu puncti ex celleritate, quam habet, celeritas ex spatio

intra

intra datum tempus confecto æstimatur; perspicuum est, puncti P per P O incedentis pro varia relatione ad varia plana variam esse celeritatem, & vim; nam relate ad planum M N spatium confectum, celeritas & vis exprimitur normali P O, relate ad planum S V spatium, celeritas, ac vis exprimitur normali P C, & relate ad planum A B spatium, celeritas & vis exprimitur normali P D; igitur idem motus, eadem celeritas, & vis puncti P revera multiplex est eodem tempore pro multiplici ad diversa plana relatione. Atque ut nullus dubio relinquatur locus, concipiatur Tab. I. F. III. scala P m, n o, q r &c. cuius gradus rectis P C, & P D alternatim paralleli sunt, ita ut summa omnium progressuum P m, n o, q r &c. rectæ P C parallelorum eidem rectæ P C æqualis sit; & summa omnium progressuum m n, o q &c. rectæ P D parallelorum eidem rectæ P D æquetur; manifestum est, mobile per hosce gradus descendens simul accedere ad planum D O spatio = P D, & ad planum C O spatio = P C. Si iam magnitudo horum graduum magis, magisque identidem minuitur, eorumque numerus augetur, abibit denique hæc scala in rectam P O, & tamen, si mobile per P O incedat, summæ progressuum rectis P D, & P C parallelorum iisdem rectis P D, & P C æquales erunt. Patet igitur quod corpus ex P in O perveniens simul accedat ad planum C O spatio, celeritate, ac vi = P C, & ad planum D O, celeritate, ac vi = P D.

Cavendum, ne numerus & summa progressuum cum magnitudine eorundem confundatur. Mobile per P O incedens totidem progressus facit versus planum D O, quot faceret incessu per P D, ac totidem progressus versus planum C O, quot faceret incessu per P C. At quia per P O incedens eodem tempore *ad planum D O & C O accedit, hinc magnitudo alicuius progressus in diagonali nunquam magnitudini progressuum respondentium per latera simul sumtorum æqualis est. Universe numerus quantitatum infinitesimarum a magnitudine earundem distinguendus est.*

§. XLIX.

Corollarium II. Ex his intelligitur, quod resolutio motuum, ac virium, ut ea supra a nobis definita est, nihil fictitium contineat, vel imaginarium, sed reipsa in natura detur. Nam mobile per eundem motum distantias suas a diversis planis non fictitie, sed reipsa mutat; igitur idem motus ad diversa plana referri, & potest & debet; quemadmodum enim locus alicuius puncti per distantias a diversis punctis, vel planis determinatur; ita mutatio loci, sive motus non nisi per distantiarum mutationem determinari potest, ac debet. Ea mutatio distantiarum fit eodem tempore; quia pro diverso planorum situ ad alia maiore spatio, ad alia minore, & proin maiore, vel minore celeritate ac vi eodem tempore accedit. Denique ipsa motuum & virium compositio, quæ omnium consensu in natura locum habet, sine resolutione eorundem intelligibili modo explicari nequit, uti mox palam fiet.

§. L.

Axioma I. Quotiescunque vires componentes in eandem lineam rectam, eandemque plagam conspirant, motus compositus fit summa virium componentium: si in eandem lineam rectam, sed in plagas oppositas, motus compositus fit differentia virium componentium; ac si hæ æquales sint, ut differentia sit zerus, motum efficiunt nullum. (§. X.) Nam vires in eandem rectam conspirantes sunt caussæ homogeneæ, quarum effectus, si directe agunt, est ut summa: si reciproce; ut differentia earundem.

§. LI.

Axioma II. Quodvis corpus eodem tempore impulsum binis viribus æqualibus, & oppositis, non obstante earum virium æqualitate & oppositione simul vi alia impelli, moverique potest quavis alia directione media. Punctum P T. I. Fig. IV. simul impulsum viribus m P, & n P, quæ æquales, & oppositæ sunt, sive quæ in eandem rectam, sed oppositas plagas tendunt, nequit

quit secundum alterius utrius directionem moveri (Ax.I.) ac nihilominus impelli, & moveri potest directione PO, vel P q; quod facile intelligitur, si planum, in quo corpus P constitutum, iisque viribus æqualibus & oppositis simul adfectum ponitur, eodem tempore quavis alia directione P O, vel P q transferri concipitur.

Quod vires m P, & n P æquales, & oppositæ directionem in puncto P efficiant nullam, ac proinde neque motum, non solum ex principio rationis sufficientis negativo deducitur, quasi nulla esset ratio, cur P potius ad m, quam ad n accedat. Nam vires m P, & n P, dum æquales, & directe oppositæ ponuntur, hunc ipsum effectum habent, ne mobile secundum alterius directionem moveatur, vel ad alterum accedat.

§. LII.

Propositio. *Si quod corpus simul impellitur binis viribus, quæ sunt ut latera cuiusdam parallelogrammi, motu composito describet diagonalem eiusdem, quæ situ directionem, & longitudine celeritatem motus compositi exhibet.* Impellatur (T. I. F. V. & VI.) mobile diversis viribus, quæ directione & magnitudine sint ut A B, & A C; incedet per A D celeritate, quæ est ad celeritatem virium componentium seorsim A B vel A C, ut A D: A B vel A C. Demonstratur. 1. Construatur super rectas A B, A C parallelogrammum A B C D, ducaturque diagonalis A D. In hanc, si opus sit, productam ex B, & C demittantur perpendicula B m, C n; ac super rectas A B, B m, & A C, C n nova fiant parallelogramma P m, & Q n. Quoniam (F.V.) AB = C D, & ang. B A m = ang. C D n; anguli vero ad m, & n ex constr. recti; erunt triangula A B m, C D n æqualia per congruentiam ob omnes angulos utrinque æquales, & unum latus; eritque B m = C n, & consequenter P A = A Q; præterea A m = n D. Idem patet in casu Fig. VI. Nam primo anguli ad m, & n recti sunt ex constr. & rectæ A B, C D æquales & parallelæ; hinc erunt anguli B A m, & C D n utpote alterni externi æquales.

2. Secundum dicta corpus per vim A B simul accedit ad planum P B celeritate, ac vi = A P, & ad

planum B m celeritate ac vi = A m; similiter per vim A C accedit ad planum Q C celeritate ac vi = A Q, & ad planum C n celeritate ac vi = A n; sunt autem celeritates ac vires A P, A q æquales, & oppositæ; quare extincto earum effectu, seu potius æquilibrato neutri obsequetur; restat igitur motus secundum residuas vires A m, & A n in eandem lineam & plagam tendentes in casu Fig. V. in oppositam vero plagam in casu F. VI. Est vero utrinque A m = n D; quapropter in priore casu manet summa virium A m + A n = A n + n D = A D; & in posteriore A n — A m = A n — n D = A D, quæ utrinque est diagonalis; eodemque tempore motu æquabili describitur, quo per vires componentes seorsim A B, vel A C eædem rectæ A B, vel A C describerentur; igitur diagonalis situ directionem, & longitudine celeritatem motus compositi exhibet.

Quivis animadvertet, quid ad compositionem motuum explicandam eorundem resolutio conferat. Cum enim diagonalis motum compositum exprimens nunquam summæ laterum æqualis sit, ratio reddenda est, an, & quantum vires componentes in eadem linea recta versus eandem plagam conspirent, & versus oppositas plagas oppositæ sint, atque ita oppositæ, ut celeritas motus compositi præcise tanta sit, quantam diagonalis repræsentat. Hæc ratio distincte explicari nequit, nisi adhibita motuum resolutione. Illud quoque animadvertitur, demonstrationem propositionis casum acuti, & obtusi anguli virium componentium continere; in casu anguli recti (quamquam admodum improbabile, angulum virium geometrice rectum esse) constructio, & demonstratio eodem modo peragitur, ut in acuto angulo. Tota vero hæc deductio de resolutione, & compositione motuum, quemadmodum plurimæ aliæ theoriæ in Phil. nat. etsi externam veluti speciem a Mathesi accipiat; tamen omnino physica est, & principiis physicis ac realibus nixa; quod ut clarius perspiciatur, quædam dubia ante resolvenda sunt, quam ad corollaria, & adplicationem propositionis veniatur.

§. LIII.

§. LIII.

Resolvuntur Dubia.

I. *Ponatur F. II. punctum P unica vi impressa, & directione P O urgeri versus planum S V; erit is motus simplex, utpote ex unica & simplici ortus determinatione; & tamen secundum dicta resolvi potest in motum P C perpendicularem ad planum S V, & motum P D ei plano parallelum: igitur hæc resolutio, quæ motum simplicem ex binis diversis motibus P C, & P D productum fingit, revera fictitia est.* R. d. c. Hæc resolutio fictitia est, h. e. Si vis unica simplex P O concipitur orta, vel composita ex pluribus P C, & P D, quibus coniunctim æquivalet, tum vero aliquid fingitur, C. C, si motus simplex ad alia, atque alia plana diversum inter se situm habentia refertur, a quibus eodem tempore distantia non eodem mutatur modo, tum etiam aliquid fingitur, n. c. Aliter ego quidem, ac passim fieri solet, motuum resolutionem definio; & quamvis nominis definitio arbitraria sit; tamen id, quod definitio continet, revera consentaneum esse rerum naturæ, & distinctis loci notionibus ostendi. Quantumcunque ideas nostras de loco, motu, celeritate excutiamus, nihil extricabimus profecto, nisi relationes distantiarum ab assumtis punctis, vel planis, quas intra datum tempus per motum mutari concipimus. Celeritas, siquod tempus constans sumitur, ex confecto spatio, spatium vero confectum ex mutatione distantiarum, distantiæ, si de planis sermo est, ex normalibus in ea demissis æstimandæ sunt. Siquis motus ad datum planum est normalis, omnes eundem, ac celeritatem illius per lineam normalem exprimunt; fieri tamen potest, ut ob alium motum ipsi plano, & corpori incidenti communem directio mobilis in spatio absoluto admodum diversa & varia sit. Quapropter de spatio confecto, celeritate, ac vi non nisi relate ad assumtum aliquod planum differi potest.

II. *Illa plana fictitia sunt, neque existunt in natura.* R. Si hæc theoria motus compositi adplicatur ad facta naturæ, quodvis mobile per motum suum distantiam a circumpositis corporibus, vel planis reipsa mu-

 tat,

tat, non mutare fingitur: quando sphæram mundanam secamus diversis planis circularibus, etsi hæc imaginaria sint; tamen positiones siderum, & relationes distantiarum, ac motuum, ad quas determinandas eos circulos assumimus, propterea fictitiæ haud sunt. Nempe opus est nobis ad mentis conceptus cum aliis communicandos aptis vocabulis: opus est ad quantitates determinandas certis mensuris; ob quam caussam etiam ad spatia, celeritates, ac vires determinandas certa plana, ac certas a planis distantias, & distantiarum relationes sumere cogimur.

III. *Paradoxum videtur, eidem mobili e.g. puncto P, quando incedit per PO, multiplicem celeritatem eodem tempore inesse, aliam relate ad planum MN, aliam relate ad planum SV, aliam relate ad planum AB.* R. Esset id non modo παραδοξον, sed prorsus αδυνατον, si *idem* mobile relate ad *idem* planum simul celeritate A, simul celeritate B poneretur accedere; at referendo motum ad alia, atque alia plana tam parum id mirum cuiquam videri potest, ac quod idem corpus a diversis planis diversum inter se situm obtinentibus eodem tempore non distet æqualiter; ex hoc enim necessario consequitur, ut inchoato motu nec eodem modo distantias suas ab iisdem mutet; quod ex idea situs, ac celeritatis perspicuum est.

IV. *Si idem motus ad alia atque alia plana referri potest, nulla est ratio, cur ad explicandam compositionem motuum* (T. I. F. V.) *motus AB præcise resolvatur in motus AP, & Am: motus AC vero in motus AQ, & An.* R. Quia corpus eodem tempore nequit per diversas, aut oppositas vias incedere, idcirco ut vera ratio motus compositi, eiusque celeritatis, ac directionis adsignetur, motus diversi sic resolvendi sunt, ut adpareat, quatenus singuli in eandem lineam & versus eandem plagam conspirent, & quatenus in eadem linea, sive e diametro oppositi sint. Porro motus AB, & AC in eandem lineam, ac plagam conspirant secundum motus Am, & An, & oppositi e diametro sunt relate ad motus AP, & AQ; ex illis fit summa, ex his differentia $= 0$ in nostro casu. Atque id quidem,

quod

quod ex motibus penitus conspirantibus summa, ex oppositis differentia sumenda sit, omnino perspicuum est, certumque; quæ sit ratio virium sub quodam angulo concurrentium, haud paullo obscurius est, quod vel ipsæ auctorum diversæ expositiones ostendunt. Quapropter quod obscurum incertumque est, ad certa, & manifesta principia reducere conati sumus.

V. *Motuum compositio lex naturæ dici potest, atque in ea acquiesci citra aliam expositionem.* R. Compositio non est magis lex naturæ, quam motus curvilineus, qui pariter compositus est, & tamen curvilinei motus ratio reddenda est a Philosopho. Sunt nempe quædam naturæ leges, quas primitivas adpellavi in Philos. Prim. (§. XLI.) in quibus etiam philosopho citra ulteriorem investigationem acquiescendum puto, propterea quod nulla in hoc mortali statu patere via videatur, qua ad primum earum fontem, unde dimanant, perveniri queat. At vero sunt alia theoremata Mechanices, quorum ratio longius arcessenda est, ut simplicitas, atque uniformitas naturæ in maxima effectuum varietate intelligatur. Hæc quidem lex de compositione motuum in motum per diagonalem ad corporum inertiam pertinet, ob quam materia ad quamvis celeritatem, & directionem est determinabilis; unde consequi videtur, ut, si mobile incursu binarum determinationum quandam viam *possit* arripere, qua utraque determinatio ceu caussa necessaria plenum effectum sortiatur, eam arripere omnino debeat, & necessario semper arripiat ob ipsam illam determinabilitatem ad quamvis celeritatem, & directionem: talem viam non esse aliam, nisi quam diagonalis designat, patet ex eo, quod mobile simul impulsum binis viribus, e. g. P D, & P C (Fig. III.) & motu composito ex P veniens in O ad utrumque planum A B, & S V tantundem accedat, quantum per singulas determinationes seorsim accessisset. Cæterum posita etiam hac corporum inertia quæri potest, nullane detur binarum virium sub angulo quodam concurrentium oppositio, & pugna, quod quidem dubium motuum resolutione aptissime solvi posse arbitror. Cæterum etsi quidam nullam in natura agnoscant virium resolutionem, nemo tamen Philosophorum est, qui ea-

dem non sæpissime utatur in naturæ investigatione. Sed quidquid alii sentiant, nunc quidem corollaria ex propositione antea demonstrata colligemus, quæ præ disceptationibus longe maioris momenti sunt.

§. LIV.

Corollarium I. In omni motu compositio fit, ut mobile in fine cuiusvis temporis sit ibi, ubi esset, si singulos motus componentes habuisset alios post alios in sua quosque directione; Si enim (Fig. VII.) seorsim percurrisset P D, & D O) quæ est eadem directio ac P C utpote huic parallela) esset in O, ubi nimirum est per motum compositum P O. Eodemque modo si capiatur in diagonali quodvis punctum r, ducanturque r m, r n parallelæ ad P C, P D; erit mobile in r, dum viribus seorsim agentibus percurreret P m, & P n; cum enim eodem tempore percurratur diagonalis, ac quodvis latus, & motus sit æquabilis, spatia in diagonali, vel quovis latere percurso semper erunt proportionalia totis, ut sit P O : P r = P D : P m = P C : P n. Patet etiam diagonalem esse viam brevissimam, quia eandem eodem tempore absolvit, quo unicum tantum latus percurreret seorsim; quod simplicitatem naturæ palam facit.

§. LV.

Corollarium II. Quo acutior est angulus virium componentium, eo maior est celeritas motus compositi, quo obtusior, eo minor: si rectus est, ea medium quemdam tenorem servat. Nam Fig. V. angulus virium C A B cum angulo A B D semper æquat duos rectos: igitur quo acutior ille, eo iste obtusior, consequenter latus ei oppositum, sive diagonalis celeritatem motus compositi exprimens, maior: contra quo ille obtusior, eo iste acutior, ac proinde latus oppositum minus: imminuto ultra omnes terminos angulo virium, latus A D ultra omnes terminos ad summam reliquorum accedit: contra aucto ultra omnes terminos angulo virium latus A D semper propius ad differentiam accedit.

§. LVI.

§. LVI.

Corollarium III. Quotcunque (Fig. VIII.) ponantur motus, ac vires diversæ, A B, A C, A D, A E in idem mobile simul concurrere, semper feretur motu composito ex omnibus; ac componantur primo vires A B, A C ope parallelogrammi A B F C, cuius bina latera A B, A C exprimunt vires componentes, diagonalis A F vim compositam; tum hæc A F cum quapiam alia A D per aliud parallelogrammum combinetur, in quo A G sit vis composita ex A F, hoc est, ex A B, A C & A D; demum ipsa A G componatur cum A E, ut diagonalis A H exprimat effectum omnium simul. Porro animadvertendum, quocunque ordine adsumantur vires componentes, semper ad idem tamen perveniri debere punctum H; etsi id quidem ex ipsa constructione figuræ, nisi admodum adcurata sit, ægre deprehendatur. Sed ut rei istius ratio perspiciatur, sit (Fig. IX. T. I.) quodvis planum S V positum ultra omnes rectas A B, A C &c. in quod ex puncto H demittatur perpendicularis H V; sive ponatur mobile per omnes rectas accedere ad hoc planum, sive per alias accedere, per alias recedere, sive in eadem manere distantia; manifestum est, quocunque ordine adsumantur vires, summam omnium accessuum demtis recessibus semper fore æqualem; quare si facta computatione distantia mobilis a plano S V est æqualis rectæ H V, eadem erit distantia, si alio ordine componantur vires, semperque punctum extremum H erit in aliquo puncto rectæ P Q, parallelæ ad S V, & ab ea distantis intervallo æquali H V. Concipiatur dein aliud planum V Z priori normale; quocunque ordine componantur vires, semper eadem erit summa accessuum (demtis recessibus, siqui forent) ad planum V Z; quapropter si extremum punctum H in aliquo casu est in recta V Z, semper erit in eadem recta. Cum igitur extremum punctum H semper sit in recta P Q, & simul in recta V Z, necessario erit in communi earum rectarum intersectione, h. e. Quocunque ordine adsumantur vires componentes, semper ad idem perveniri debet punctum H.

§. LVII.

Corollarium IV. Quia vis composita AH (T.I. F.VIII.) eundem præstat effectuum, quem vires componentes coniunctim edunt; idcirco vis per diagonalem expressa nuncupatur vis *æquipollens* datis viribus A B, A C, A D, A E. Vis autem æqualis A h, quæ contraria directione eundem effectum A H præstare potest, pariter æquipollens est, & cum illis æquilibrium efficiens; nam si simul darentur vires A h, & A B, A C, A D, A E, facta compositione punctum H recideret in ipsum A, ac tum omnes eæ vires, & potentiæ in æquilibrio erunt, & effectus suos mutuo destruent. Quapropter viribus componentibus quotcunque semper substitui potest vis æquipollens per diagonalem expressa, ac si pluribus viribus, vel potentiis angulum efficientibus resistendum est, ea resistentia in directione diagonalis adplicari debet.

§. LVIII.

Corollarium V. Non modo diagonalis æquipollet viribus laterum, sed vis lateris cuiuscunque componitur ex viribus reliquorum, mutata tamen in contrariam alterius directione. Vis A C (T. I. F. X.) æquipollet vi A D, & A E = A B; si enim super hasce vires parallelogrammum construatur, vis A C erit diagonalis, seu vis æquipollens; & ex eadem ratione vis A B æquipollet viribus A D, & A F = A C.

CAPUT III.

De Conflictu Directo Corporum non Elasticorum.

In corporum conflictu fere concursus plurium virium, & compositio quædam motuum fit in eadem recta conspirantium, vel oppositorum, uti in conflictu directo, vel sub angulo concurrentium, uti in obliquo. In natura corporum, & elementorum perpetua pugna est; quare in primis explicandæ leges conflictuum a vi inertiæ pendentes, ut siquæ sint aliæ vires, deinceps stabiliri queant.

§. LIX.

§. LIX.

Definitio I. Quando corpora in se impingunt, sive concurrunt inter se, & *mutuo* confligunt ob reactionem actioni æqualem (§. XXIX.) spectanda est *primo* constitutio ipsorum corporum concurrentium; sintne elastica, vel non elastica. *Secundo* linea directionis corporum: tertio ipsa actio, & reactio. Corpora *elastica* sunt, quæ figuram ictu, tensione, & compressione mutatam cessante vi opposita iterum recuperant. *Non elastica* sunt, quorum figura aut non mutatur ab ictu, uti essent perfecte *dura*, quæ comprimi non possent: aut si mutata est, cessante vi opposita non restituitur, uti fit in cera vel argilla molli, aut plumbo. Hæc dicuntur mollia.

Institutis circa varia corpora experimentis, & observationibus verisimile fit, non reperiri ullum corpus perfecto elaterio præditum, aut omni elaterii vi penitus destitutum; quævis enim corpora aliquo saltem modo comprimi possunt, & corpora compressa elastica quandam mollitiem, non elastica aliquam elaterii vim habent; Nihilominus statuendæ sunt leges 1° de non elasticis, quæ ponuntur perfecte dura, aut perfecte mollia. 2. De elasticis iis, quorum elaterii vis perfecta ponitur. Si enim utriusque generis leges ad nostra corpora transferantur, eo propiores erunt adcurationi, quo magis ad perfectam duritiem mollitiemve, aut perfectam elasticitatem accedunt.

§. LX.

Definitio II. Conflictus corporum *directus* est, si directio corporum congredientium est in eadem linea recta: si vero corporum directiones angulum efficiunt, conflictus adpellatur *obliquus*. Concipiantur bini globi penitus homogenei, quorum directio est linea a centro utriusque globi descripta; erit conflictus eorum directus, si linea coniungens centra globorum in puncto contactus, ubi colliduntur, in directionem utriusque vel alterius globi incidit, uti fit Fig. XI. T. I. ubi M A est directio globi A; N B directio globi B; & recta A C B linea coniungens centra globorum in puncto

con-

contactus C in directionem utriusque, vel Fig. XII. ubi linea A C B centra globorum coniungens in puncto contactus C incidit in directionem N B globi B. At conflictus obliquus est, si linea centra globorum in puncto contactus iungens in neutrius globi directionem incidit, uti F. XIII. ubi linea C G D centra connectens in puncto contactus G cum utraque directione A C, & H D angulum efficit.

§. LXI.

Definitio III. In omni tam directa, quam obliqua percussione triplex casus consideratur. I. Siquod corpus incurrit in aliud tardius motum, sive minore celeritate præcedens II. Siquod in aliud quiescens incurrit. III. Si alteri ex contraria parte venienti occurrit. Ordinem horum cásuum adcurate deinceps tenebimus. Porro *actio* corporum in se incurrentium in eo sita est, quod a corpore A, dum in aliud B tardius præcedens, vel quiescens vel contraria directione obviam veniens incurrit, hoc corpus B ad motum determinetur secundum directionem incurrentis, eique vis quædam secundum hanc directionem imprimatur: *Reactio* in eo sita est, quod corpus impulsum B incurrenti resistat, eique vim secundum directionem contrariam ei, qua incurrebat, imprimat.

Bina corpora, eaque sphærica in conflictu spectamus; corpus A incurrens, quod in primo casu maiorem in altero solum habere celeritatem, in tertio maiorem quantitatem motus habere ponimus; alterum est corpus impulsum B: quod in primo casu minorem, in altero nullam celeritatem, in tertio minorem motus quantitatem habeat. Si in tertio casu quantitates motuum æquales sint, perinde est utrum A vel B dicas. Sit massa incurrentis M, celeritas ante conflictum C, erit in eo quantitas motus ante conflictum $M\ C$. Celeritas in conflictu ab eo amissa sit Z. Sit dein corporis impulsi massa m, celeritas ante conflictum c; erit quantitas motus ante conflictum $m\ c$. celeritas in conflictu acquisita secundum directionem incurrentis sit x. Et quoniam directiones, ac motus oppositi corporum, si analytice exhibentur, signis contrariis adficiendi sunt; idcirco si motus corporis incurrentis designe-

gnetur signo positivo + (*quod quidem positivum signum semper intelligi solet, si nullum datæ quantitati signum præfixum est*) *erit motus alterius corporis contraria directione occurrentis in tertio casu exprimendus signo negativo* —. *Quam ob rem in primo percussionis casu celeritas corporis impulsi erit c seu* + *c, in altero c* = o. *In tertio* = — *c. Quantitas motus in eodem ante conflictum erit generatim* $\pm$ *m c. In qua expressione signum positivum ad primum casum, negativum ad tertium pertinet; in secundo casu utrumvis sumatur, semper erit m c* = o, *quia c* = o. *Summa igitur quantitatum motus corporis utriusque ante conflictum erit M C* $\pm$ *m c. Si datæ sint celeritates C, &* — *c, summa erit C* — *c; differentia C* + *c. Quapropter assumtis hisce signis pro diversitate directionum, & secundum regulas algebræ tractatis ipsa etiam directio corporum ex calculo innotescit; si enim ex M C fit* — *M C signum est, massam incurrentem directionem accipere priori contrariam; & si expressio* — *m c vertatur in aliam, quæ signum habeat positivum, id indicio est, corpus impulsum mutata directione priore secundum directionem oppositam post conflictum ferri. Nempe ut Newtonus ait, in Arithmetica universali quantitates vel adfirmativæ sunt, seu maiores nihilo, vel negativæ, seu nihilo minores. Sic in rebus humanis possessiones dici possunt bona adfirmativa, debita vero bona negativa: in motu locali progressus dici potest motus adfirmativus, & regressus motus negativus, quia prior auget, posterior minuit iter confectum; & ad eundem modum in geometria, si linea versus plagam quamvis ducta pro adfirmativa habeatur, negativa erit, quæ versus plagam oppositam ducitur.*

§. LXII.

Lex I. Conflictus. *Summa quantitatum motus ante, & post conflictum eadem est, sive non mutatur ab actione mutua corporum.* Dem. Sit quantitas motus in corpore incurrente ante conflictum = M C: in impulso $\pm$ m c; erit summa ante conflictum M C $\pm$ m c. Quoniam actiones corporum æstimantur ex quantitatibus mo-

motuum productis, vel extinctis (§.XXX.) Sit quantitas motus corpori impulso secundum directionem incurrentis communicata $= q$; erit in eo quantitas motus post conflictum $= \pm m\ c + q$; & quoniam ob æqualitatem actionis & reactionis tantundem amittitur ab incurrente, quantum in impulso producitur, erit quantitas motus corporis incurrentis post conflictum $= M\ C - q$; summa quantitatum motus post conflictum erit $M\ C - q \pm m\ c + q = M\ C \pm m\ c$ uti ante conflictum.

Expressio $M\ C - m\ c$ assumtis pro directionum oppositione signis oppositis summa vocatur analytice: spectato sensu qui ad numeros transfertur, differentiam motus quantitatum indicat: idcirco ista lex passim enunciari in hunc modum solet: in conflictu summa motuum, qui fiunt in eandem plagam, aut differentia oppositorum, constans est.

§. LXIII.

Lex II. *Celeritas post conflictum in incurrente, & impulso eadem est, sive communis, & æquatur summæ quantitatum motus ante conflictum divisæ per summam massarum.* Dem. 1. pars. Actio corporum concurrentium tanta est, & tamdiu præcise durat, donec ambo eadem celeritate, & directione progrediantur; neque potest corpus impulsum *tardius* moveri post conflictum, quam incurrens facto iam incursu movetur; secus istius motus & directionem impediret, & ad maiorem celeritatem determinaretur: neque *celerius*; quamprimum enim celeritatem æqualem habet ei, quæ in incurrente post impulsum residua est, huic non amplius resistit, & actionem incurrentis quodam modo effugit. Ob hanc caussam utrumque corpus post conflictum instar unius massæ communi celeritate animatæ spectari potest. Ut 2. pars demonstretur, hæc communis celeritas post conflictum dicatur u, quæ ducta in summam massarum dabit summam quantitatum motus post conflictum, nempe $u \times \overline{M + m}$; & quoniam summa quantitatum motus ante & post conflictum eadem est ex Leg. præc. erit

erit $u \times \overline{M + m} = M C \pm m c$; unde fit $u = \frac{M C \pm m c}{M + m}$.

§. LXIV.

Corollarium I. Inventa celeritate $\frac{M C \pm m c}{M + m}$ invenitur etiam quantitas motus post conflictum, nempe in corpore incurrente $= \frac{M C \pm m c}{M + m} \times M = \frac{M^2 C \pm M m c}{M + m}$; & in corpore impulso $\frac{M C \pm m c}{M + m} \times m = \frac{M m C \pm m^2 c}{M + m}$. Est igitur quantitas motus post conflictum ut quartus terminus proportionalis ad summam massarum, summam quantitatum motus ante conflictum, & massam dati corporis, nempe incurrentis, vel impulsi, cuius quantitas motus post conflictum quæritur.

Fiat summa inventarum quantitatum motus post conflictum, $\frac{M^2 C \pm M m c + M m C \pm m^2 c}{M + m}$, *eaque secundum regulas algebræ dividatur per datum divisorem, invenietur* $M C \pm m c$, *uti ante conflictum, quemadmodum Leg. I. ostendimus.*

§. LXV.

Corollarium II. Data quantitate motus ante conflictum, eaque inventa post conflictum invenitur quantitas motus q, ab uno amissa, ab altero acquisita, nempe

pe $q = M\,C - \frac{M^2\,C \mp M\,m\,c}{M + m}$, sive reducendo quantitatem integram M C ad fractam,

$$q = \frac{M^2\,C + M\,m\,C - M^2\,C \mp M\,m\,c}{M + m}$$

facta reductione $= \frac{M\,m\,C \mp M\,m\,c}{M + m} = \frac{M\,m \times \overline{C \mp c}}{M + m}$

& resolvendo in analogiam $M + m : M\,m = \overline{C \mp c} : q$

hoc est, *quantitas motus ab incurrente amissa, ab impulso acquisita est ut quartus terminus proportionalis ad summam massarum, productum massarum, & differentiam celeritatum ante conflictum.*

Cavendum magnopere, nequa perturbatio ob mutationem signorum oriatur: facta subtractione, quæ mutatione signorum fit, erit differentia celeritatum in primo casu $C - c$; in secundo C; in tertio $C + c$.

§. LXVI.

Corollarium III. Ex amissa quantitate motus ab incurrente, & ab impulso acquisita, reperitur celeritas Z ab incurrente in conflictu amissa, & celeritas x ab impulso acquisita; modo quantitas amissa, & acquisita dividatur per *massam* amittentis, vel acquirentis; hinc

cum sit $q = \frac{M\,m \times \overline{C \mp c}}{M + m}$, erit $Z = \frac{m \times \overline{C \mp c}}{M + m}$,

sive uti *summa massarum ad massam corporis impulsi, ita differentia celeritatum ante conflictum ad celeritatem ab incurrente amissam.*

& in impulso cum pariter sit $q = \frac{M\,m \times \overline{C \mp c}}{M + m}$;

erit

$$\text{erit } x = \frac{M \times \overline{C \mp c}}{M + m}$$ five ut *summa massarum ad massam corporis incurrentis; ita differentia celeritatum ante conflictum ad celeritatem ab impulso acquisitam.* Ex his deducitur

I. Si celeritas amissa ab incurrente comparetur cum celeritate acquisita ab impulso, erit

$$M + m : \overline{C \mp c} = m : Z$$
$$M + m : \overline{C \mp c} = M : x$$

Unde fit $M : m = x : Z$; *ut se habet massa incurrentis ad massam impulsi corporis; ita reciproce celeritas ab impulso acquisita ad celeritatem ab incurrente amissam.*

II. Quia $M + m : \overline{C \mp c} = m : Z$, five $M + m : m = \overline{C \mp c} : Z$ hinc si massæ ponuntur æquales, ut sit $M = m$; erit m dimidia summa $M + m$; & z erit dimidia differentia celeritatum ante conflictum; & quoniam in casu secundo ea differentia est $= C$; idcirco corpus incurrens in massam æqualem, & quiescentem, dimidiam celeritatis prioris partem amittet. Si $M > m$; tunc, uti massa m est minor dimidia summa massarum; ita corpus incurrens minus, quam dimidiam differentiam celeritatum amittet. Si $M < m$; amittet plus quam dimidiam differentiam ob eandem rationem. Si ponitur massa m quiescens, ut differentia celeritatum fit $= C$; eaque admodum vasta, & infinite magna sumitur, ut massa M illius comparatione evanescat; tunc erit $M + m = m$; & $C = Z$, hoc est, corpus incurrens in massam infinite magnam amittet omnem celeritatem; eiusmodi massa infinite magna censetur obex immobilis; quare si corpus non elasticum incurrit in obicem immobilem pariter non elasticum, post ictum quiescit. E contrario si massa corporis incurrentis sit incomparabiliter maior, ut massa impulsa m evanescat, & fiat $= o$, erit $Z = o$; nam analogia $M + m : m = \overline{C \mp c} : Z$, abit

abit in hanc $M + o : o = C \mp c : o$; adeoque celeritas ante & poſt conflictum eadem eſt; tale quidpiam fieri concipimus, cum vaſtiſſimi planetarum in tenuiſſimos lucis halitus per ſpatia cœleſtia vacua diſperſos incurrunt; qui proin de priore celeritate nihil cenſentur amittere. Si in tertio caſu ponitur $M\ C = m\ c$, patet, quod communis celeritas $\frac{M C - m c}{M + m}$ fit $= o$, h. e. corpora mollia æquali vi occurrentia ex oppoſitis partibus, poſt conflictum quieſcunt, nempe quodvis reſpectu alterius eſt hoc caſu inſtar obicis immobilis.

§. LXVII.

Exempla Arithmetica.

I. Exempla de caſu I. Retentis, ut ante, literarum ſignificationibus dicatur quantitas motus poſt conflictum in incurrente $M\ u$; in impulſo $m\ u$. Sit $M = 3$. $C = 3$. $m = 3$. $c = 1$. erit $u = \frac{M C + m c}{M + m} = \frac{9 + 3}{3 + 3} = 2$. & $M\ u = 6$. $m\ u = 6$ ut inveniatur q ſeu quantitas motus ab incurrente amiſſa, fieri poteſt $M\ C - M\ u = 9 - 6 = 3$. aut fiat ex Cor. II. ut ſumma maſſarum ad productum earum, ita differentia celeritatum ante conflictum ad q; ſeu $6 : 9 = 2 : \frac{18}{6} = 3$.

Celeritas amiſſa reperitur ex Cor. III. ut ſumma maſſarum ad differentiam celeritatum: ita maſſa impulſi ad Z, hoc eſt, $6 : 2 = 3 : 1$.

Sit $M = 2$. $C = 14$. $m = 4$, $c = 8$; erit $u = 10$. $M\ u = 20$. $q = 8$. $Z = 4$. $m\ u = 40$. $x = 2$. Sit $M = 3$. $C = 2$. $m = 2$. $c = 1$. erit $u = \frac{8}{5}$. $M\ u = \frac{24}{5}$. $m\ u = \frac{16}{5}$. $q = \frac{6}{5}$. $Z = \frac{2}{5}$. $x = \frac{3}{5}$. Sit $M = 6$. $C = 5$. $m = 3$. $c = 2$. erit $\frac{M C}{m c} = 30$.

$m\,c = 6.\ u = 4.\ M\,u = 24.\ m\,u = 12.\ q = 6.$ $Z = 1.\ x = 2.$

II. Exempla de casu II. Sit $M = 9.\ C = 1.\ m = 5.$ $c = 0.$ erit $u = \frac{M\,C}{M + m} = \frac{9}{14}.\ M\,u = \frac{81}{14}.\ m\,u = \frac{45}{14}$; unde iterum fit $M\,u + m\,u = \frac{81 + 45}{14} = 9$, h. e. quantitas motus ante & post conflictum eadem est. Ut inveniatur quantitas motus amissa q, subtrahatur quantitas motus post conflictum a quantitate motus ante conflictum $9 - \frac{81}{14} = \frac{126 - 81}{14} = \frac{45}{14}$; aut fiat ex Cor. II. ut summa massarum ad productum earundem; ita differentia celeritatum ad q, seu $14 : 45 = 1 : \frac{45}{14}$. Ex Cor. III. reperitur $Z = \frac{5}{14}$. & $x = \frac{9}{14} = u$, in casu II. Sit $M = 2.\ C = 18.\ m = 4.\ c = 0.$ erit $M\,C = 36.\ m\,c = 0.\ u = \frac{M\,C}{M + m} = \frac{36}{6} = 6.$ $M\,u = 12.\ m\,u = 24.\ q = 24.\ Z = 12.\ x = 6.$

Exempla de casu III. Sit $M = 3.\ C = 6.\ m = 3.$ $- c = - 2$, erit $M\,C = 18.\ - m\,c = - 6.$ $\frac{M\,C - m\,c}{M + m} = 2 = u.\ M\,u = 6.\ m\,u = 6.\ q = 12.$ nam ex Cor. II. fiat $M + m : M\,m = C + c : q.$ $Z = 4$; fiat enim ex Cor. III. $M + m : C + c = m : Z.$ seu $6:8 = 3 : \frac{24}{6} = 4.\ x = 4$; nempe massa impulsa m, quae habuerat negativam celeritatem $= - 2$; dum aliam positivam, nempe secundum directionem incurrentis acquirit, quae est $= 4$; retinet celeritatem positivam $= 2 = u$.

Sit $M = 4.\ C = 9.\ m = 3.\ - c = - 5.$ erit $\frac{M\,C - m\,c}{M + m} = u = \frac{36 - 15}{7} = 3.\ M\,u = 12.\ m\,u = 9.$

$= 9 . q = 24$ Ex Cor. II. $Z = 6 . x = 8$. Sit $M = 2 . C = 6 , m = 3 . - c = - 4$. erit $\frac{MC - mc}{M + m} = 0$.

CAPUT IV.

De Conflictu Directo Corporum Perfecte Elasticorum.

Quæ ad conflictum perfecte mollium, vel durorum pertinent, ex binis legibus, quarum demonstratio facillima est, deduximus Nunc eadem ad congressum corporum perfecte elasticorum ita adplicabimus, ut ex unica præmissa proportione mox palam fiat, præsentem tractationem prioris corollarium quoddam esse.

§. LXVIII.

Propositio. *Effectus collisionis corporum perfecte elasticorum est duplus eius, qui contingeret absente elasticitate, sive in conflictu corporum perfecte elasticorum quantitas motus ab uno amissa, ab altero acquisita, est dupla illius, quæ absente elasticitate amittitur, vel acquiritur.* Dem. Actio mutua corporum, qua elaterium comprimitur, eo usque durat, donec utrumque ad æqualem celeritatem secundum eandem directionem determinetur, aut celeritas incurrentis destruatur tota; tamdiu enim corpus impulsum alterius motui resistit: obtenta celeritatum æqualitate, aut vi incurrentis destructa, elaterium *eadem* vi, qua compressum est, se restituit, proindeque effectus elaterii æqualis est effectui actionis & reactionis corporum, totus autem effectus in congressu elasticorum duplus illius, qui absente elasticitate contingeret.

Duplex, uti MacLaurinus docet, temporis periodus in congressu elasticorum spectanda est; altera, qua durante figura corporis elastici mutatur: altera, qua restituitur. Concipiatur inter corpora A & B elasticitatis expertia interposita spira elastica K L (F. XIV. T. I.) Dum corpus

A

A versus B progreditur, & per interpositum elaterem in B agit, elater necessario magis magisque continuo comprimitur, donec utrumque corpus ad eandem secundum directionem incurrentis celeritatem determinetur: postea cum resistentia corporis B cesset, etiam actio corporis A cessabit; estque hæc prima temporis periodus. At elaterium cessante vi comprimente sese paulatim restituet, & vi quidem eadem (in hypothesi perfecte elasticorum) qua compressum fuit, ita ut vis restitutionis æque corpus incurrens A, ac impulsum B adficiat, quemadmodum actio incurrentis, & compressio elaterii utrumque corpus adfecit; atque hæc est periodus altera. Quod ob intermedium fit elaterem, idem, si immediate congrediuntur corpora elastica, usuvenire debet.

§. LXIX.

Corollarium I. Effectus collisionis idem est, si utrumque corpus, sive unum quodvis ex binis ponatur elasticum. Sit F. XV. T. I. utrumque elasticum. Inprimis compressio elaterii, ac determinatio ad motum similiter fit, ac in corporibus non elasticis. At restitutio partium corporis B usque ad f g compressarum fiet directione n m opposita directioni incurrentis, quod ob istam restitutionem de priore motu tantum amittet, quantum per incursum amiserat. Restitutio partium corporis A usque ad c d compressarum fiet directione m n conspirante cum directione primi motus; quocirca in impulso B tantus iterum motus producitur, quantus prima actione incurrentis producebatur. Sit dein unicum incurrens A elasticum (Fig. XV. n. III.) alterum perfecte durum. Prima periodus, & compressio elateris respondet actioni corporis incurrentis; & quia restitutio compressioni æqualis fit directione m o, corpus impulsum novam vim priori æqualem recipiet; simul vero motui incurrentis tantundem iterum resistet, quantum primæ actioni restiterat. Quare & quantitas motus amissa ab A, & acquisita a B duplicatur.

Si demum (Fig. XV. n. II.) solum B impulsum ponitur elasticum, alterum A perfecte durum, restitutio fiet directione n o vi æquali factæ compressioni; unde

in A tanta iterum vis extinguitur, quanta per resistentiam corporis B & compressionem elateris extinguebatur. At corpus B pariter novam & priori æqualem determinationem secundum directionem incurrentis acquiret; nequit enim elater se restituere directione n o, quin corpus B directione contraria cedat, uti quodvis corpus elasticum, si ad planum adprimitur, contraria directione resilit. Aliud teste experientia contingit, si corpus molle cum elastico confligit.

§. LXX.

Corollarium II. Corpus impulsum B post conflictum semper habet directionem corporis incurrentis A; id quod in primo, & secundo casu perspicuum est; nullam enim tum quidem directionem in plagam contrariam acquirit. In tertio casu, si corpus impulsum B vocetur id, quod minore vi cum altero congreditur, amissa priore quantitate motus secundum directionem fortioris repelleretur etiam absente elasticitate; multo igitur magis interveniente elaterio id fieri debet; quia in tertio casu demtis utrinque viribus, quatenus æquales sunt, corpus fortius perinde se habet, ac si per excessum virium in quiescens incurreret. Si in tertio casu motus quantitates, quas ad conflictum adferunt, æquales ponuntur, utrumque eadem vi, qua alteri occurrit, resiliet. Quæstio igitur de directione post conflictum duntaxat ad corpus incurrens A pertinet, cuius motus ante conflictum signo positivo + a nobis adficitur; quapropter si formula eius quantitatem motus, vel celeritatem post conflictum exprimens signum habuerit negativum, id indicio erit, corpus incurrens A reflecti; si ea fuerit = o; id subsistet immotum post conflictum; si positivum retinet signum priore directione motum suum continuabit; quæ quidem omnia a ratione massarum pendent.

§. LXXI.

Problema. *Datis celeritatibus, & massis corporum concurrentium, leges non elasticorum transferre ad conflictum elasticorum.* Resolutio. Quoniam in corporibus elasticis effe-

effectus collisionis (nempe quantitas q ab incurrente amissa, ab impulso acquisita) est duplus; hinc valor eum effectum exprimens in corporibus non elasticis duplicetur. Est autem absente elasticitate $q = \frac{M\,m \times \overline{C \mp c}}{M + m}$ adeoque posita corporum confligentium elasticitate, erit

$$q = \frac{M\,m \times 2\,\overline{C \mp c}}{M + m} = \frac{2\,M\,m\,C \mp 2\,M\,m\,c}{M + m}$$

unde fit $M + m : M\,m = 2\,\overline{C \mp c} : q$; uti summa massarum ad productum earundem; ita dupla differentia celeritatum ad quantitatem motus ab uno elasticorum amissam, ab altero acquisitam.

§. LXXII.

Corollarium I. Celeritas Z ab incurrente amissa reperitur, si motus quantitas amissa dividitur per M, ut fit $Z = \frac{m \times 2\,\overline{C \mp c}}{M + m}$ & celeritas x acquisita ab impulso est eadem quantitas motus per massam impulsi m divisa, ut fit $x = \frac{M \times 2\,\overline{C \mp c}}{M + m}$. Unde existunt analogiæ $M + m : m = 2\,\overline{C \mp c} : Z$

& $M + m : M = 2\,\overline{C \mp c} : x$

denique $M : m = x : Z$ uti supra (§. LXVI.)

§. LXXIII.

Corollarium II. Si effectus collisionis q a priore motus quantitate corporis incurrentis subtrahitur, & in corpore impulso additur, habetur utriusque motus quantitas post conflictum, & directio ex qualitate signorum.

E 4 Est

Est igitur in corpore incurrente quantitas motus post conflictum

$$= M C \frac{-2 M m C \pm 2 M m c}{M + m} = \frac{M^2 C - M m C \pm 2 M m c}{M + m}$$

& in corpore impulso quantitas motus post conflictum

$$= \pm m c + \frac{2 M m C \mp 2 M m c}{M + m}$$

$$= \frac{\pm m^2 c + 2 M m C \mp M m c}{M + m}$$

§. LXXIV.

Corollarium III. Inventa quantitas motus post conflictum divisa per M celeritatem & directionem incurrentis post conflictum exprimit; & alterius motus quantitas divisa per m celeritatem corporis impulsi; dicatur illa prior V, hæc u; erit

$$V = \frac{M C - m C \pm 2 m c}{M + m}$$

$$u = \frac{\pm m c + 2 M C \mp M c}{M + m}$$; igitur in binis primis casibus est $u = \frac{m c + 2 M C - M c}{M + m}$, in tertio $u = \frac{M c - m c + 2 M C}{M + m}$.

Celeritas utriusque corporis post conflictum erui eodem modo potest ex data celeritate C, *&* $\pm c$ *ante conflictum, & inventa per Coroll. I. celeritate amissa* Z, *& acquisita* x; *erit enim* $V = C - Z = \frac{M C - m C \pm 2 m c}{M + m}$;

& sic de celeritate $u = \pm c + x$.

§.

§. LXXV.

Corollarium IV. Ponantur massæ æquales, seu $M = m$; erit $V = \pm \frac{2 m c}{2 m} = \pm c$; & $u = \frac{2 M C}{2 M} = C$. h. e. Si massæ sunt æquales, corpora post conflictum permutatis celeritatibus feruntur; ac corpus impulsum B semper habet directionem incurrentis: hoc vero incurrens A in primo casu perget ut ante; in secundo quiescet, quia tum $c = o$; in tertio reflectetur; igitur massæ æquales corporum elasticorum ex oppositis plagis sibi occurrentes post conflictum permutatis celeritatibus resiliunt. II. Si $M > m$; celeritas V in corpore A post conflictum in primo, & secundo casu semper est quantitas positiva; nam si $M > m$; erit etiam $M C > m C$; proinde valor formulæ $\frac{M C - m C + 2 m c}{M + m}$ manet positivus. In tertio casu, ad quem signum negativum — quantitatis $2 m c$ pertinet, fieri potest, ut V sit quantitas negativa. III. Si ponitur $M < m$; corpus incurrens in tertio, & secundo casu (in quo $2 m c = o$) semper reflectetur; at in primo casu aliquando reflectetur, aliquando quiescet, aliquando priore perget directione. Nam in formula $\frac{M C - m C + 2 m c}{M + m}$, si $M < m$; erit $M C < m C$; ponatur hæc differentia negativa $= - d$; si iam hæc differentia $- d$ æqualis est quantitati positivæ $2 m c$; corpus A quiescet; si ea differentia est maior quantitate $2 m c$, reflectetur; si minor, priore directione perget. IV. Si in tertio casu ponitur $M c = m c$; formula celeritatis V pro eo casu abit in hanc $V = \frac{- M C - m C}{M + m} = - C$, & $u = \frac{M c + m c}{M + m} = + c$ h. e. Dum corpora elastica æqua-

li motus quantitate ex oppositis partibus sibi occurrunt, eadem celeritate, qua accesserunt, reflectuntur.

§. LXXVI.

Exempla Arithmetica.

I. Exempla de massis æqualibus, vel casu, in quo $M = m$. Sit $M = 3$. $C = 4$. $m = 3$. $c = 2$. Quæratur quantitas motus q, & celeritas Z, & x amissa vel acquisita; dein quantitas motus M V, & m u, ac celeritas V, & u post conflictum: igitur fiat secundum §.LXXI. ut summa massarum, ad productum &c. $6 : 9 = 4 : \frac{36}{6} = 6$. quæ est quantitas motus amissa ab incurrente, & ab impulso acquisita; erit $Z = \frac{6}{3} = 2$. $x = \frac{6}{3} = 2$. $M V = M C - q = 12 - 6 = 6$. $m u = m c + q = 6 + 6 = 12$. $V = \frac{M V}{M} = \frac{6}{3} = 2$. $u = \frac{m u}{m} = \frac{12}{3} = 4$. Est igitur post conflictum in A celeritas 2, ante conflictum 4: in B post conflictum celeritas 4; ante conflictum 2. Igitur si massæ æquales sunt, celeritates permutantur Coroll. IV. §. LXXV.

Sit $M = 3$. $C = 8$. $m = 3$. $c = 0$; erit $q = 24$. $Z = 8$. $x = 8$. $M V = 0$. $V = 0$. $m u = 24$. $u = 8$.

Sit $M = 3$. $C = 6$. $m = 3$. $- c = - 2$. erit $q = 24$. $Z = 8$. $x = 8$. $M V = 18 - 24 = - 6$. $V = - 2$. $m u = - 6 + 24 = 18$. $u = 6$. Patet, quod massæ æquales ex oppositis partibus occurrentes permutatis celeritatibus resiliant.

II. Exempla, de casu, quo $M > m$ ponitur. Sit $M = 6$. $C = 5$. $m = 3$. $c = 2$. erit $q = 12$. $Z = 2$. $x = 4$. $M V = 30 - 12 = 18$. $V = 3$. $m u = 18$. $u = 6$. Sit $M = 6$. $C = 6$. $m = 3$. $c = 0$. erit $q = 24$. $Z = 4$. $M V = 36 - 24 = 12$. $V = 2$. $m u = 24$. $u = 8$. Nempe si $M > m$, in primo, & secundo conflictus casu quantitas V semper est positiva; non item in tertio casu; nam in hoc casu valor formulæ

M C

$$\frac{M C - m C - 2 m c}{M + m}$$ varius esse potest. Sit enim
$M = 5.\ C = 6.\ m = 1.\ - c = - 6.$ erit $V = + 2.$
Sit $M = 3.\ C = 6.\ m = 1.\ - c = - 6$; erit $V = 0.$
Sit $M = 4.\ C = 3.\ m = 2.\ - c = - 3.$ erit $V = - 1.$

III. Exempla de casu, quo $M < m$ ponitur; corpus incurrens in secundo, & tertio conflictus casu semper reflectetur; in primo vel reflectetur, vel quiescet, vel motum priorem continuabit. Sit $M = 3.\ C = 6.\ m = 6.\ c = 0.$ erit $q = 24.\ Z = 8.\ x = 4.\ MV = 18 - 24 = - 6.\ V = - 2.\ mu = 24.\ u = 4.$ Sit $M = 2.\ C = 6.\ m = 3.\ - c = - 4.$ erit $q = 24.\ Z = 12.\ x = 8.\ MV = 12 - 24 = - 12\ V = - 6.\ mu = - mc + q = - 12 + 24 = 12.\ u = 4.$ Ut exempla ad primum percussionis casum in data hypothesi $M < m$, pertinentia intelligantur, præ oculis habeatur formula $V = \frac{M C - m C + 2 m c}{M + m}$; sit
$M = 2.\ C = 6.\ m = 3.\ c = 1$; erit $V = 0.$
$M = 1.\ C = 5.\ m = 3.\ c = 1$, erit $V = - 1.$
$M = 3.\ C = 5.\ m = 6.\ c = 2$; erit $V = + 1.$

CAPUT V.

De Conflictu Corporum Obliquo, & Motu Reflexo ac Refracto.

Quæ de resolutione & compositione motuum, de directo conflictu corporum non elasticorum, vel elasticorum demonstrata sunt, adplicari ad conflictum obliquum possunt. Ad hunc locum aptissime referri posse motus corporum reflexi, & refracti videbantur.

§. LXXVII.

Lex I. *Si globus in planum immobile incidit ad perpendiculum, & nulla globi vel plani elasticitas intervenit, sisti-*

sistitur: interveniente elasticitate reflectitur ad perpendiculum. Dem. I. pars. Obex immobilis est instar massæ infinitæ (§. LXVI.) quapropter globus in eum ad perpendiculum incidens omnem velocitatem perdet; cumque nulla alia vis adsit, post incidentiam quiescet. Dem. 2. pars. Interveniente elasticitate effectus collisionis est duplus illius, qui ea absente contingeret; cum igitur hac absente amittat omnem motum, ea interveniente præterea motum negativum sive contrariæ directionis priori æqualem habebit; nempe in restituenda figura tantundem velocitatis acquirit, quantum amiserat in mutanda.

Si elasticitas ponitur perfecta, eadem qua accessit, celeritate, & ad idem spatium reflectetur globus; si elasticitas imperfecta, ob quam vis restitutionis est minor vi compressionis, resiliet cum minore celeritate, & ad minus spatium. Hæc lex, etsi ad conflictum directum pertineat, tamen ut leges reflexionis in unum colligerentur locum, hic commemoranda fuit.

§. LXXVIII.

Lex II. *Si globus in planum immobile oblique incidit, & omnis absit elasticitas, progredietur secundum directionem plani cum velocitate, quæ ad velocitatem priorem est ut cosinus anguli incidentiæ ad radium: si vero globus incidens est perfecte elasticus, reflectetur sub angulo reflexionis æquali angulo incidentiæ.* Sit F. XVI. T. I. S V planum immobile, in quod globus incidat directione A D; demisso perpendiculo, erit A D C angulus incidentiæ, A C sinus illius, C D cosinus; cui æqualis fiat D G. Ex puncto incidentiæ D erigatur perpendicularis D B, & ducatur A B parallela ad C D. Vis A D ad planum obliqua resolvitur in vim A C plano normalem, & A B vel C D plano parallelam; hæc post incursum integra manet; nam directioni plano parallelæ planum non resistit. Tota igitur actio globi oblique incidentis fit per vim A C; cumque hæc vis contraria reactione destruatur, nullæque adsint aliæ vires, manet directio & vis D G = C D. Si A D, quæ vim absolutam exprimit, sumitur pro sinu toto, erit A D : C D (= D G)

(= D G) seu vis absoluta ad vim residuam ut sinus totus ad cosinum anguli incidentiæ: vis autem absoluta ad vim A C, qua agit in planum, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ. Dem. 2. pars. Interveniente elasticitate, eadem directione, & vi A C, qua fit actio corporis in planum, fit compressio elaterii, ac si id perfectum est, tanta est restitutio, quanta compressio. Exprimatur directio, & vis restitutionis in puncto incidentiæ D per rectam perpendicularem D B; ex hac vi elaterii, & priore vi D G componetur motus per diagonalem D E parallelogrammi B D G E supra vires D B, & D G descripti. Dico, angulum reflexionis E D G æqualem esse angulo incidentiæ A D C; nam in triangulis A D C, E D G anguli ad C & G recti sunt, cum sit G E parallela ad B D & A C, quæ sunt normales, præterea ex constr. C D = D G, & G E = D B; igitur triangula æqualia sunt per congruentiam, & ang. A D C = ang. E D G.

Si vis restitutionis sit minor vi compressionis, uti in corporibus imperfecte elasticis, ea exprimetur per D m, fietque diagonalis D n in parallelogrammo super vires D m, & D G constructo; eritque angulus n D G minor angulo E D G; corpus igitur imperfecte elasticum reflectitur sub angulo minore, quam sit angulus incidentiæ. Qui virium resolutionem in natura non agnoscunt, nec eam pro expositione physica habent, in corporibus non elasticis oblique incidentibus concipiunt vim resistentiæ plani expressam recta D B, eamque cum vi priore D f = A D combinant, indeque per diagonalem D G parallelogrammi super D f ceu vim absolutam, D B ceu plani resistentiam constructi vim plano parallelam, quæ post incursum residua est, exprimunt. Sed ego quidem resistentiæ cuiusdam sine actione nullam ideam habeo, neque actionem & resistentiam sine virium oppositione concipio, neque virium oppositionem sine mutua earum consumtione quadam, seu extinctione, uti idem in concursu directo globorum fit; Non video igitur, quomodo resistentia plani exprimi possit, & actio corporis impingentis non exprimi recte possit, aut quomodo utraque intellecta motus D G, qui post actionem & resistentiam manet, sine virium resolutione explicari queat. Si ita repræsentare vi-

res

res licet, ut exprimatur resistentia sine actione, vel actio & resistentia sine oppositione, & destructione quadam virium; cur, si corpus F. IV. T. I. in plano horizontali Po incedit, non exhibent iidem resistentiam plani Pn sine actione corporis Pn; quod si faciant, mobile semper discedet a plano horizontali Po, & abibit via quadam media Pq. His quidem consideratis opinione mea recte sentit Cel. Frisius in opere de Gravit. omn. corp. Schol. C. I. L. I. ex obliquis corporum ictibus manifeste falsum deprehendi, naturam tantum compositione uti, nunquam resolutione. Nec vero dici potest, si eadem vis A D (F. XVI. T. I.) simul actionem expressam per A C, simul motum per D G indicatum efficit, fore effectum maiorem sua caussa; nam spectanda est ipsa quoque directio, & adplicatio caussæ seu potentiæ, quæ directione A D agere non potest, quin illos effectus edat eodem tempore; quia ut supra ostendi, eadem vis mobile revera versus planum S V transfert vi & celeritate = A C, & versus planum B D vi & celeritate = A B, vel D G; verum quidquid alii sentiant, intererat sane de resolutione motuum verba facere paullo diligentius, cum ea nemine Mechanicorum refragante via æque tuta, ac plana sit ad demonstrationem plurimorum theorematum, vel problematum solutionem perveniendi, ad quam hæc unica patere via, scilicet resolutio virium, sæpenumero videtur; id quod suspicionem non levem ingerit, eandem in natura re vera obtinere.

§. LXXIX.

Corollarium. Ex his intelligi poteſt, quid in colliſione obliqua corporum fiat, quorum neutrum relate ad alterum obex immobilis eſt. Sit (F. XIII. T. I.) globorum A, & D directio A C, D H; ac concipiatur recta C D centra globorum iungens in puncto contactus G. Per hoc punctum concipiatur planum E F ad rectam C D normale, itemque alia bina plana priori parallela per A B & H I, ut directio motuum determinari poſſit. Reſolvatur vis A C in A B, & B C; vis H D in H I, & I D. Vires A B, H I, cum ſint parallelæ nihil mutationis in colliſione inducunt, nihil ipſæ habent, ſed integræ manent, ac per C M, D K ex-

exprimendæ funt. Motus igitur fiet viribus oppofitis B C, & I D. Pro varia erga mutatione celeritatis, & directionis, quæ in tertio conflictus cafu præfertim interveniente elaterio contingit, erit velocitas & directio globi A poft conflictum M N, & motus C N ex C M & M N compofitus, aut velocitas & directio M n, & motus C n ex C M & M n compofitus; eodemque modo fiet in globo D motus compofitus per D L, vel D l. Ex his illud perfpicuum eft, fi plures concipiantur globi elaftici, vel non elaftici, nifi in eadem omnes linea recta per centra globorum tranfeunte fiti fint, & percuffio pariter directa, & centralis fit, fieri haud poffe, ut motus ab altero ad alterum linea recta perpetuo propagetur.

§. LXXX.

Definitio. Refractio motus eft deviatio quædam mobilis a priore directione, ob quam verfus eandem quidem plagam, fed non in eadem linea recta motum continuat; uti contingit fi mobile per diverfa media e. g. ex aere in aqua, vel ex aqua in aerem tranfit. Sit F. XVII. T. I. S V fuperficies novi medii, in quod mobile directione A C tranfit. Si motum non in eadem recta A C D continuat, fed inde a puncto C per C e fertur, eius motus dicitur *refringi.* Directio prioris motus five recta A C eft linea *incidentiæ*; directio motus pofterioris feu recta C e linea *refractionis; Punctum incidentiæ* C; recta G F in puncto incidentiæ ad fuperficiem novi medii perpendicularis, eft *axis*, vel *perpendiculum refractionis*, *&* *incidentiæ*; angulus A C G, quem linea directionis A C cum perpendiculo efficit, eft *angulus inclinationis.* Angulus e C F, quem linea refractionis cum perpendiculo continet, *angulus refractus,* Angulus e C D, quem prior directio continuata efficit cum linea refractionis, vocatur *angulus refractionis.* Porro fi linea refractionis C e magis ab axe C F recedit, quam prior directio motus continuata ex A C in C D, fit *refractio a perpendiculo*; fi magis accedit, *ad perpendiculum.*

In hisce notionibus determinandis paffim inconftantia quæ-

quædam deprehenditur; quapropter scribentium mens explorenda est.

§. LXXXI.

Lex motus refracti. Si motus ad datum planum obliquus in perpendicularem, & parallelum resolvitur & in puncto incidentiæ ratio vis perpendicularis ad parallelam mutatur, neutra tamen penitus extinguitur; contingit refractio illius motus, fitque a perpendiculo, si vis perpendicularis minui, aut parallela augeri; ad perpendiculum, si vis perpendicularis augeri, aut parallela minui concipitur. Dem. Motus obliquus A C resolvatur in motum A E plano S V perpendicularem, & A B parallelum; fiatque C D = A C; C L = E C, C H = C B. Si in C vis perpendicularis C H = A E minuitur, fitque æqualis C m, manente vi C L, ex iis componetur motus C e magis a perpendiculo recedens; vel si manente vi C H, concipitur vis parallela C L augeri, ut fiat æqualis C n; ex iis componetur C i pariter a perpendiculo recedens. Similiter demonstratur accessus ad perpendiculum, si vis perpendicularis augeri, aut parallela minui concipitur.

Cui data demonstratio, quæ vel ex inspectione figuræ patet, non satisfacit, sumat in triangulo D C L rectam C L, quam pono constantem, pro radio, erit D L, quæ vim perpendicularem exprimit, tangens anguli D C L. Ex elem. Tangentes, & cotangentes rationem habent reciprocam; quo minor igitur fit D L seu vis perpendicularis, eo magis crescit eius cotangens, sive tangens anguli DCH, proin etiam crescit angulus refractus; imminuta ergo vi perpendiculari crescit angulus refractus, ac refractionis linea magis a perpendiculo removetur. Ponatur nunc vis perpendiculis C H constans, fitque C H radius, erit D H tangens anguli D C H; crescente igitur tangente D H = C L, quæ vim parallelam exprimit, angulus quoque refractus crescet, lineaque refractionis iterum a perpendiculo removebitur. Similiter demonstrabo, aucta vi perpendiculari, aut imminuta parallela, fieri refractionem ad perpendiculum. Exemplum refractionis præbet globus ex aere in aquam oblique transiens; quatenus

enim

enim in densius medium descendit, ac maiorem in eo descensu resistentiam sentit, eius vis perpendicularis imminuitur, ac proin refractio fit a perpendiculo: si angulus incidentiæ admodum exiguus sit, ut vis perpendicularis destruatur tota, manebit sola vis parallela, aut accedente elaterio fiet reflexio, eo modo, quo motum fieri post incursum in planum immobile diximus: illud nemo non videt, corpus normaliter incidens in aliud, nullam pati refractionem, sed eadem recta pergere, vel post incursum quiescere, aut reflecti debere; quia nulla adest caussa directionem mutans; proinde eadem constans manet ob vim inertiæ. §. XXIV. Si globus iam penitus immersus est in aqua, utique & vis perpendicularis & parallela maiorem quam ante in aere, resistentiam sentit; sed nulla tum adest caussa rationem earum virium, quæ residuæ sunt, immutans. At ponatur globus in eo situ, ubi superficiem novi medii e. g. aquæ contingere incipit: si tum solam haberet vim superficiei aquæ parallelam, nullam pateretur resistentiam: at quatenus concipitur in aquam descendere, huic descensui seu vi perpendiculari medium densius magis resistit, eamque unam adficit, perinde ac si directione illa perpendiculari nova vis opposita imprimeretur; unde consequitur ut vis perpendicularis maiorem aut minorem, quam antea, rationem ad parallelam habeat, & refractio a perpendiculo fiat.

CAPUT VI.

De Motu Uniformiter Accelerato, & Retardato.

Quibus notiones, & elementa quantitatum infinitesimalium perspecta sunt, iis nihil in omni hac tractatione obscurum, nihil dubium videri potest; aliis quidem ita declarare rem omnem satagemus, at theoriam motus accelerati, quæ summi in Newtoniana Physica momenti est, quantum necesse est, arripiant. Lemmata ad eas quantitates pertinentia in illum maxime locum reieci, quo eorum expositio facilior, & usus uberior esse videbatur.

§. LXXXII.

Definitio. Vis, quæ continuo agit, five quæ celeritatem continuo auget, vel minuit, *acceleratrix*, vel *retardatrix* dicitur, eaque *conſtans*, ſi incrementa vel decrementa celeritatis quæ producit, intra æqualia tempora æqualia ſunt: *variabilis*, ſi ea incrementa, vel decrementa ſunt inæqualia. Motus, quem vis acceleratrix, vel retardatrix conſtans producit, *uniformiter acceleratus, vel uniformiter retardatus* adpellatur, in quo nimirum celeritates creſcunt, vel decreſcunt, uti tempora, æquali tempore æqualiter, duplo, vel triplo tempore in ratione dupla, vel tripla.

§. LXXXIII.

Corollarium. In motu uniformiter accelerato celeritates ſunt temporibus proportionales. Sequitur id ex notione eius motus. Proinde ex proportione C : c = T : t, enaſcitur formula C = T. Ac ſi tempora, & celeritates geometrice exhibendæ ſunt ope linearum, eæ non niſi per lineas proportionales exhiberi poſſunt, quales ſunt in triangulo rectangulo, in quo tota altitudo totum tempus, quo is motus durat, partes altitudinis, quæ adpellantur *abſciſſæ*, partes temporis denotant: baſis celeritatem finalem, lineæ ad baſin parallelæ, quæ *ordinatæ* vocantur, celeritatem datæ parti temporis reſpondentes denotant. Sit ABC Fig. XVIII. T. I. eiusmodi triangulum, in quo recta b c ponitur parallela ad baſin B C; erit ex Elem. A B : B C = A b : b c, hoc eſt ut totum tempus indicatum per A B ad partem temporis A b; ita celeritas finalis B C, quæ toto tempore acquiritur, ad celeritatem b c, quæ acquiritur parte temporis A b.

§. LXXXIV.

Propoſitio. *In motu uniformiter accelerato ſpatium dato tempore percurſum, eſt dimidium eius, quod eodem tempore celeritate finali ſive quæ in fine motus uniformiter accelerati acquiritur, motu æquabili conficeretur.* Sit celeritas finalis C; datum tempus T, ſpatium percurſum S;

S; si ea celeritas finalis C, initio motus extitisset, & mansisset constanter eadem, spatium seu S foret $= C\,T$. §. XXXVII. Dico, in motu uniformiter accelerato spatium confectum esse $= \frac{C\,T}{2}$. Dem.

Concipiatur totum tempus T in tempuscula minima, & inter se æqualia divisum; & celeritas primo tempusculo producta dicatur c. Quoniam in hoc motu celeritates crescunt ut tempora, habebitur uti tempusculorum, ita celeritatum intra eadem genitarum progressio arithmetica: $c.\ 2\,c.\ 3\,c.\ 4\,c.\ 5\,c.\ 6\,c. \text{———} C$; in qua serie terminus ultimus C est celeritas finalis toto tempore T paulatim collecta. Iam vero tempusculis minimis motus haberi potest pro constante, & æquabili; si enim durante quodam tempusculo variatio celeritatis conciperetur, non iam conciperetur tempusculum minimum. Hinc spatium tempusculis minimis & inter se æqualibus, quorum singula sunt ut 1, percursum, erit ut celeritas, secundum formulam $S = C$. Ergo singuli termini dictæ progressionis exprimunt spatia singulis tempusculis minimis confecta, & summa progressionis exprimit spatium S toto tempore T percursum. Est autem ex Elem. summa progressionis, cuius primus terminus c est minimus relate ad ultimum æqualis dimidio facto ex ultimo termino C in numerum terminorem T; nam tempus T est numerus sive summa omnium tempusculorum, in quæ dividitur; Est igitur in hoc motu $S = \frac{C\,T}{2}$.

Universe ex Elem. summa s progressionis arithmeticæ æquatur facto ex summa termini primi a, & ultimi ω in dimidium numerum terminorum n, ut sit

$$s = \frac{a\,n + \omega\,n}{2}.$$

Ex geometria infinitesimorum constat si primus terminus a sit minimus, id est, minor quavis magnitudine determinate adsignabili, eum evanescere & haberi posse pro Zero; ut proinde eo casu sit summa pro-

 gres-

gressionis $s = \frac{\omega n}{2}$. *Porro cum celeritates sint ut tempora, & tempuscula semper minora, & minora concipi possint, etiam celeritas primo tempusculo genita magis magisque minui potest, ac denique ea relate ad celeritatem finalem C evanescet, eritque* = 0. *Certe quo minora concipiuntur tempuscula, in quæ dividitur datum tempus T, eo propius terminorum summa accedet ad dimidium factum* $\frac{1}{2}$ *C T. Concipiatur tempus divisum in* 10 *partes, ut dimidius terminorum n sit* 5; *erit summa* = $\overline{1 + 10} \times 5 = 55$. *Dividatur idem tempus in* 100 *partes, erit summa* = $\overline{1 + 100} \times 50 = 5050$. *Dividatur idem tempus in* 1000 *particulas, fiet summa* = 500500. *Celeritas initialis ceu primus terminus hic ponitur* = 1. *Finalis in primo casu ponitur* = 10; *in altero* = 100, *in tertio* = 1000. *Si celeritas finalis* 10 *initio motus extitisset, spatium intra tempus pariter ut* 10, *esset* = 100. *Nunc cum successive acquiritur, id spatium fit* = 55. *Est autem* 100 : 55 = 20 : 11. *Igitur excessus supra dimidium æquatur* $\frac{1}{20}$. *In altero casu celeritas finalis est* = 100, *& si constans fuisset per tempus ut* 100, *spatium foret* = 10000: *nunc vero spatium reperitur* = 5050. *Est autem* 10000 : 5050 = 200 : 101 *excessus ergo supra dimidium æquatur uni ducentesimæ parti. In casu tertio celeritate finali* = 1000 *tempore* = 1000 *spatium foret* = 1000000. *Celeritate autem paulatim crescente spatium fit* = 500500; *est autem* 1000000 : 500500 = 2000 : 1001. *Igitur excessus supra dimidium est una bis millesima pars. Atque in hunc modum quo plura, adeoque etiam quo minora concipiuntur tempuscula, in quæ datum tempus dividitur, eo minor est excessus spatii a duplo spatio celeritate finali eodem tempore conficiendi; cum igitur numerus tempusculorum semper augeri possit, is excessus semper minuetur, ac denique evanescet, ut ratio spatii motu æquabili & celeritate finali confecti ad spatium motu uniformiter accelerato percursum exacte* $= C\,T : \frac{C\,T}{2}$.

§.

§. LXXXV.

Corollarium I. Exprimat F. XVIII. recta B C celeritatem finalem, A B tempus, quo motus durat; si ea celeritas finalis initio temporis extitisset, & perdurasset æquabiliter tempore A B, spatium confectum exprimeretur per rectangulum A B C D; cum ergo huius dimidium designet spatium motu accelerato percursum, istuc exprimetur per triangulum rectangulum A B C: ut proinde spatia motu uniformiter accelerato confecta, sint ut triangula rectangula, quorum abscissæ tempora ordinatæ celeritates exhibent.

§. LXXXVI.

Corollarium II. In hoc motu spatium tempore A b confectum, est ad spatium confectum tempore A B, ut triangulum A b c ad triangulum A B C; sunt autem hæc triangula similia, ac proin in ratione duplicata laterum, id est, abscissarum, vel ordinatarum: abscissæ exprimunt tempora, ordinatæ celeritates; igitur *spatia in hoc motu sunt in ratione duplicata temporum, vel celeritatum*, intelligendo tempora ab initio motus A computata, & celeritates inde ab initio usque ad certum tempus acquisitas. Idem patet ex formulis hactenus demonstratis; nam $C = T$ (§. LXXXIII.) & $S = \frac{CT}{2}$; proinde substituendo factores proportionales (§. XVI. n. III.) $S = \frac{C^2}{2} = \frac{T^2}{2}$; sive $S : s = \frac{C^2}{2} : \frac{c^2}{2} = C^2 : c^2$

§. LXXXVII.

Corollarium III. Quoniam $S = T^2$ vel C^2, erit $T = \sqrt{S}$, & $C = \sqrt{S}$. §. XVI. n. IV. *Celeritates, & tempora in hoc motu sunt in ratione subduplicata spatiorum.*

§. LXXXVIII.

Corollarium IV. Quia tempora ordine naturali nu-

merorum crescunt, ac celeritates iisdem proportionales sunt: spatia vero in ratione temporum, vel celeritatum duplicata; erit

Series temporum & celeritatum	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Series spatiorum ab initio motus	1.	4.	9.	16.	25.	36.
Spatia singulis temporibus seorsim confecta.	1.	4—1.	9—4.	16—9.	25—16.	36—25
	1.	3.	5.	7.	9.	11

Igitur *in motu uniformiter accelerato, si spatium primo tempore confectum ponitur* = 1; *reliqua spatia singulis temporibus seorsim confecta crescunt ut numeri impares, sive in progressione arithmetica numerorum imparium.*

§. LXXXIX.

Corollarium V. *Quaecunque data celeritas, qua mobile intra certum tempus certum spatium conficit, concipi potest acquisita motu libero & uniformiter accelerato per certam altitudinem, vel spatium continuato*; nam crescente tempore crescit celeritas: tempus vero indefinite crescere potest, igitur & celeritas; quapropter quaecunque data celeritas denique acquiri potest hoc motu. e. g. globus tormentarius iusta pulveris quantitate excussus observante Mersenno intra 1'' conficit 600 pedes. Igitur concipi potest, globum ex ea altitudine lapsum hoc motu, ut celeritas finalis esset ea, qua si aequabiliter moveretur, intra 1'' conficeret 600 pedes.

§. XC.

Corollarium VI. Quoniam motus uniformiter retardatus est, in quo aequali quovis tempore aequalia fiunt decrementa celeritatis, uti si mobile proiiciatur directione opposita vi acceleratrici; hinc in eo motu singulis tempusculis amittitur gradus celeritatis aequalis illi, quam vis acceleratrix secundum contrariam directionem producit. Sicut autem decrementa celeritatis in motu uniformiter retardato aequalia sunt incrementis in motu accelerato: sic decrementa spatiorum aequalia sunt spatiis, quae eodem tempore per vim accele-

ra-

ratricem conficerentur, ſpatia per vim acceleratricem ſingulis temporibus confecta, ſunt: 1.3.5. 7. 9. 11 &c. Talia igitur ſunt etiam decrementa ſpatiorum. Sit ſpatium, quod vi proiectionis æquali quovis tempore conficeretur, $= 12$; accedente vi retardatrice ea ſpatia decreſcent hac proportione:

$12 - 1$.	$12 - 3$.	$12 - 5$.	$12 - 7$.	$12 - 9$.	$12 - 11$
11.	9.	7.	5.	3.	1.

Colliges 1. *Spatia motu uniformiter retardato deſcripta, decreſcunt in progreſſione arithmetica numerorum imparium*, & ſpatiis vi acceleratrice confectis prorſus æqualia ſunt, ſi computus ab ultimo tempore fiat.

2. *Spatia a fine motus computata ſunt ut quadrata temporum ordine inverſo ſumtorum.* Dividatur tempus in 6 partes æquales 1. 2. 3. 4. 5. 6.
erit ordo inverſus : 6: 5. 4. 3. 2. 1.

Si iam ſpatia a fine motus computentur $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$; fiet ſpatium $= 36$. Dein $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. Porro $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, atque ita deinceps.

3. *Spatium motu uniformiter retardato confectum duntaxat dimidium eſt eius, quod celeritate initiali, ſi conſtans maneret, deſcriberetur*; æque enim decreſcunt hæc ſpatia, uti eadem in motu accelerato creſcunt. Si celeritas initialis ponatur ea, qua ſingulis temporibus conficeretur ſpatium $= 12$, uti ſupra poſuimus; ac ſumantur 6 eiusmodi tempora, eſſet totum ſpatium in motu æquabili ſeu $S = C T = 12 . 6 = 72$. In motu autem uniformiter retardato id ſpatium invenimus $= 36 = \frac{72}{2}$. Igitur ſpatia hoc motu confecta, etiam ſunt ut *triangula, ſive dimidia rectangulorum, quorum altitudo tempus, baſis celeritatem initialem repræſentat.*

4. *Mobile per altitudinem quandam motu uniformiter retardato aſcendit eodem tempore, quo ex eadem altitudine motu uniformiter accelerato deſcenderet*, quia ſpatia a fine motus computata ſemper æqualia ſunt iis, quæ eodem tempore motu uniformiter accelerato deſcriberentur.

5. *Si mobile celeritate finali ſurſum agatur, ad eam motu retardato altitudinem eodem tempore perveniet, ex qua deſcendendo eam celeritatem acquiſivit*; quia eadem vis & motum deorſum accelerat, & motum ſurſum retardat.

Hactenus de vi acceleratrice generatim, & velut mathematice egimus; nunc eandem ad phænomena naturæ explicanda adhiberi oportet.

§. XCI.

Obſervatio I. Corpora omnia terreſtria ſibi relicta tendunt per lineam rectam perpendicularem (ad ſenſum ſaltem) deorſum ad horizontem; & quoniam vis corpora terreſtria perpetuo deorſum urgens, *gravitas* nuncupatur; idcirco directio corporum gravium, vel gravitatis cum linea horizontali, ubi ſuperficiem terræ tangit, vel cum ſuperficie aquæ ſtagnantis, efficit angulum utrinque æqualem, nempe rectum. Hoc quidem phœnomenon adeo conſtans eſt, & ubique notum, ut recta, quæ angulos deinceps poſitos æquales facit, a perpendiculo ſive directione corporis gravis, vocetur *perpendicularis*.

II. Motus corporum gravium deorſum eſt uniformiter acceleratus; ac inſtitutis primum a Galilæo, Ricciolo, & aliis poſt hos pluribus obſervationibus inventum fuit, ſpatia percurſa eſſe ut quadrata temporum; ac teſtibus maxime Academicis Pariſinis corpus libero deſcenſu conficit primo minuto ſecundo 15 pedes Pariſin. 1 dig. 2 lin. $\frac{1}{18}$. = 181 digit. 2,05 lin. intra alterum min.″ 45 ped. 3 digit. $6\frac{1}{2}$ lin. In tertio 75 ped. 5 digit. $10\frac{5}{10}$ lin. Qui numeri proxime ſunt ut 1.3.5. ac ſi ſibi addantur, ſive ſi ſpatia ab initio computentur, eadem erunt ut 1. 4. 9.

III. Excluſa aeris reſiſtentia gravia terreſtria æquali celeritate decidunt, & eodem tempore eandem altitudinem emetiuntur. Sic Newtonus L. III. Prop. XLII. Schol. gen. ait: *Proiectilia in aere noſtro, ſolam aeris reſiſtentiam ſentiunt. Sublato aere, ut fit in vacuo Boy-*

lea-

leano, resistentia cessat, siquidem pluma tenuis, & aurum solidum æquali cum velocitate in hoc vacuo cadunt. Cl. Desaguliers facto coram Rege Angliæ tentamine exhibuit, aureum & plumulam altitudinem 15 ped. in vacuo emetiri eodem tempore; id quod a pluribus deinceps tentatum, atque observatum est.

IV. Si corpora volumine aut pondere magnopere differunt, & per aerem vel aquam demittuntur, non eodem tempore idem conficiunt spatium; quod nemo non experiri potest; nempe ut Newtonus ait, *medii resistentiam sentiunt*; de qua cum sit alius agendi locus, lapsum gravium præcisa ea resistentia, perinde ac si in vacuo fieret, deinceps spectabimus.

§. XCII.

Corollarium I. Quoniam gravia telluris nostræ sibi relicta in quovis telluris loco normaliter ad horizontem tendunt: tellus autem ad sensum sphærica est; idcirco directiones gravium ad superficiem normales per centrum transeunt, & gravitas corpora terrestria ad centrum terræ urget, physice ut aiunt, & ad sensum; multæ enim irregularitates, si adcurate rem expendimus, ei directioni ad centrum obsistunt.

§. XCIII.

Corollarium II. Quia gravium liber descensus est rectilineus, & uniformiter acceleratus (quatenus sola gravitas agit) idcirco gravitas est vis acceleratrix constans, secundum eandem perpetuo directionem agens, si nempe altitudines lapsuum, & distantiæ a superficie terræ non sint nimis magnæ.

In ea quidem distantia, ad quam a nobis proiici corpora terrestria possunt, & a superficie terræ removeri, gravitas semper constans censetur, cum ea ad radium telluris non habeat sensibilem rationem.

§. XCIV.

Corollarium III. Sint bina gravia, aurum, & plu-

ma tenuis, quæ eodem tempore eandem altitudinem emetiuntur in vacuo; erunt celeritates finales utrinque eædem; proinde etiam celeritates elementares, five initiales; fingula igitur elementa, ex quibus maffæ corporum conftant, æquali vi gravitatis adficiuntur, five plura, ut in auro, five pauciora, ut in pluma, fub certo volumine contineantur; neque enim fola compofitio feu compofitionis modus ad gravitatem elementorum quidquam conferre poteft; atque ob hanc cauffam alia eft *vis acceleratrix gravitatis*, cuius menfura eft celeritas, quæque in corporibus terreftribus & elementis corporum eadem eft, & conftans: alia eft *vis motrix gravitatis*, quæ in noftris corporibus, fi ea quiefcant, *pondus* vocatur, æftimaturque ex maffa, five numero elementorum certo volumine comprehenforum. Hæc vis in diverfis corporibus diverfa eft, etfi ex eadem altitudine eodem tempore decidant; fi in vacuo Boyliano globus argillaceus, & plumbeus incidant in obftaculum molle, maiorem in hoc cavitatem efficiet plumbeus, quam argillaceus. Formulas de ponderibus expreffi §. XIX & feq.

Etfi in corporibus terreftribus cum libere decidunt, vis acceleratrix eadem fit, tamen fi decidunt per plana inclinata, vis acceleratrix, qua defcendunt fecundum directionem plani: eft minor vi illa, qua libere & perpendiculariter cadunt: præterea in maiore a terra diftantia vis illa acceleratrix decrefcere poteft, ac reipfa decrefcit, quemadmodum infra demonftrabitur; quapropter rationes virium acceleratricium diverfarum, etfi fingulæ ponantur conftantes, inveftigandæ funt.

§. XCV.

Corollarium IV. *Celeritas genita a viribus acceleratricibus diverfis, quarum fingulæ conftantes funt, eft in ratione compofita temporum, per quæ vires agunt, & virium ipfarum.* Nam fi vis ponitur utrinque eadem, celeritas crefcit ut tempus (§. LXXXIII.) fi tempus ponitur utrinque idem, perfpicuum eft, a vi duplo vel triplo aut in quacunque multiplicium, vel fubmultiplicium ferie maiore vel minore celeritatem duplo, triplo vel

vel in quacunque multiplicium aut submultiplicium ſerie maiorem vel minorem gigni : ut adeo celeritates a viribus acceleratricibus diverſis, quarum ſingulæ conſtantes ſunt, eodem tempore genitæ ſint directe ut ipſæ vires acceleratrices: quam ob rem, ſi & tempora & vires diverſæ ſunt, celeritates ſunt in ratione compoſita temporum, ac virium; quod exprimit formula $C = VT$. Quoniam autem vires acceleratrices diverſas ponimus conſtantes, ad easdem leges & formulæ de motu. uniformiter accelerato pertinent; unde facta combinatione novæ formulæ ad inveſtigationem naturæ admodum utiles enaſcuntur; quas hoc loco ſubiungemus.

I. $V = \frac{S}{T^2}$: vel $V = \frac{C^2}{S}$ hoc eſt, *vires acceleratrices diverſæ ſunt in ratione compoſita ex directa ſpatiorum, & inverſa duplicata temporum*; vel *in ratione compoſita ex duplicata celeritatum, & reciproca ſpatiorum.* Nam $C = VT$, & præterea $C = \frac{2S}{T}$ (quia $S = \frac{CT}{2}$ §.LXXXIV.) igitur $VT = \frac{2S}{T}$, & $V = \frac{2S}{T^2}$ h. e. $V : u = \frac{2S}{T^2} : \frac{2s}{t^2} = \frac{S}{T^2} : \frac{s}{t^2}$. Dein quia $C = VT$, erit $V = \frac{C}{T}$; & $T = \frac{2S}{C}$ (quia $S = \frac{CT}{2}$ §. cit.) hinc ſi pro diviſore T in formula $V = \frac{C}{T}$ ſubſtituatur valor proportionalis (§. XVI. n. III.) erit $V = \frac{C^2}{2S}$, $V : u = \frac{C^2}{2S} : \frac{c^2}{2s} = \frac{C^2}{S} : \frac{c^2}{s}$.

II.

II. $S = VT^2$, vel $S = \frac{C^2}{V}$. Nam $S = \frac{CT}{2}$, & $T = \frac{C}{V}$; hinc $S = \frac{C^2}{2V}$; & quoniam binarius est constans, fit $S = \frac{C^2}{V}$; pariter quia $S = \frac{CT}{2}$ & $C = VT$, fiet $S = \frac{VT^2}{2} = VT^2$. Hoc est, *spatia confecta per vires acceleratrices diversas, quarum singulae constantes ponuntur, sunt in ratione composita ex directa virium, & duplicata temporum, vel ex duplicata celeritatum, & reciproca virium.*

Multae aliae assignari eiusmodi formulae possunt, quae vel continentur in his, quas expressimus, vel ex iis levi brachio construuntur. Nunc usum earundem indicabimus.

§. XCVI.

ADPLICATIO THEORIAE ET EXERCITATIO.

Problema I. *Invenire spatium per gravitatem terrestrem quovis dato tempore conficiendum.* Resolutio. Quoniam gravitas terrestris constans est, spatia per eam confecta, sunt ut quadrata temporum. Est autem ea vis gravitatis terrestris, ut corpus intra 1″ percurrat 181 digitos, neglectis minutiis. Sit hoc spatium $= g$; tempus, quo conficitur $= 1$. Quodvis aliud spatium in digitis expressum, & eadem vi gravitatis motu uniformiter accelerato confectum, sit $= S$, & tempus, intra quod conficitur, in minutis secundis expressum, sit $= T$. erit (§. LXXXVII.) $g : S = 1 : T^2$; unde fit $S = gT^2$. Quaeritur spatium a gravi terrestri confectum, si motus per duas ac dimidiam horas acceleretur; erit $T = 2\frac{1}{2}$ hor. ac in minuta secunda resolutum $= 9000''$; ac $T^2 = 81000000$. Porro $g = 181$. unde fit $S = gT^2 = 14661000000$. Tot ergo digitos grave terrestre percurrit intra duas horas, ac dimidiam: ii efficiunt

ciunt pedes 1221750000. Hic numerus pedum converti poteſt in ſemidiametros terreſtres, quarum una continet pedes 19615782. Facta diviſione obtinentur 62 ſemidiametri ac præterea 5571516 pedes. Quia diſtantia media lunæ non niſi 60 ſemid. terræ æquatur, ſequitur, ut ſpatium a gravi terreſtri intra horas duas ac dimidiam confectum, maius ſit, quam diſtantia media lunæ a terra.

Problema II. *Invenire tempus, intra quod per gravitatem terreſtrem motu uniformiter accelerato conficitur datum ſpatium.* Sit datum ſpatium S = 23709 ſemidiametris terreſtribus; quæ eſt diſtantia ſolis a terra neglectis fractionibus. Quæritur tempus intra quod per gravitatem terreſtrem id ſpatium conficeretur. Si ſpatium intra 1″ confectum dicatur g, ut antea, erit $T^2 = \frac{S}{g}$, & $T = \sqrt{\frac{S}{g}}$; nempe tempora in hoc motu ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum (§. LXXXVII.) Spatium S in ſemidiametris terræ datum redigatur primo ad pedes, multiplicando per 19615782 (tot enim pedes una ſemidiameter continet) eritque = 465070575438′; qui efficiunt digitos 5580846905256; ac dividendo hunc numerum per g = 181; fiet $S = \sqrt{30833408316\frac{60}{181}}$. Radix neglecta fractione æquatur 175594, ſi minutiæ denuo negligantur. Inventus numerus tempus in minutis ſecundis exhibet, quæ efficiunt 48 hor. (id eſt, dies binos) 46′. 34′. Tanto ergo tempore corpus terreſtre motu uniformiter accelerato datum ſpatium, ſeu diſtantiam ſolis a tellure mediam ſecundum Hellium, percurrit.

Problema III. *Determinare ſpatium deſcenſus, & tempus, intra quod eadem gravitate terreſtri, & acceleratione motus corpus acquireret celeritatem finalem datam, ſive eam, qua motu æquabili intra determinatum tempus pariter determinatum ſpatium percurreret.* e. g. Quia globus tormento excuſſus (§. LXXXIX.) intra 1″ conficit 600 pedes; quæritur altitudo, per quam demittendus

dus fit, ut eiusmodi celeritatem acquirat, qua intra 1'' conficeret 600 ped. & tempus, quo eam altitudinem emetiretur. Celeritas finalis intelligitur per spatium dato tempore conficiendum motu æquabili; hinc celeritas finalis acquisita per altitudinem $g = 181$, est ad celeritatem finalem C datam in nostro casu. ut $2g : C$. Nam corpus per altitudinem g motu uniformiter accelerato delapsum eodem tempore motu æquabili conficeret 2 g seu duplam altitudinem. Quoniam spatia in hoc motu sunt ut quadrata celeritatum finalium (§.LXXXVI.) erit $4g^2 : C^2 = g : \frac{C^2 g}{4g^2} = \frac{C^2}{4g} = \frac{(7200)^2}{4.181}$; (nam pedes 600 efficiunt digitos 7200) Hæc a titudo motu uniformiter accelerato conficienda, ut acquiratur celeritas C, qua motu æquabili intra 1'' conficerentur pedes 600, efficit digitos 71602,2 proxime, sive 5966 pedes, & 10 dig. Tempus, qua hæc altitudo percurreretur, reperitur ex formula $T = \sqrt{\frac{S}{g}}$ (Probl. præc.) est autem in nostro casu $S = \frac{C^2}{4g}$. Igitur $T = \sqrt{\frac{C^2}{4g^2}} = \frac{C}{2g}$

$$= \frac{7200}{2.181} = 19'', \frac{161}{181}.$$

Quoniam motu uniformiter accelerato ad quamvis datam celeritatem denique perveniri potest, semper reperietur hoc modo altitudo respondens datæ celeritati. Si vis acceleratrix, qua corpus per altitudinem datæ celeritati respondentem fertur, ponitur diversa a gravitate terrestri; tamen altitudo respondens reperitur, modo ratio vis illius acceleratricis ad gravitatem terrestrem detur. Sit ea ratio virium ut u : 1. ac sit n numerus digitorum Parisiensium, qui data celeritate singulis minutis secundis horariis percurrerentur; fiet (§. XCV. n. II.) $\frac{4g^2}{1} : \frac{nn}{u} =$

g:

$g : \frac{nn}{4gu}$, *quæ erit altitudo respondens, per quam vi acceleratrice u acquiratur celeritas tanta, ut intra* 1'' *conficiatur spatium seu numerus digitorum Parisiensium n.*

Problema IV. *Vicissim inveniri potest finalis celeritas dato tempore acquisita, sive spatium motu æquabili conficiendum a gravi, si ea celeritate moveretur, quam acquirit libere cadendo intra tempus datum.* Sit datum tempus T, intra quod corpus libere cadit, $= \frac{1}{60}$, nempe min.''' quæ est sexagesima pars minuti secundi; quæratur primo spatium hoc tempore confectum, sive $S = gT^2 = \frac{181}{60^2}$.

Porro quia spatia motu uniformiter accelerato confecta sunt ut quadrata celeritatum finalium, erit $g : gT^2 = 4g^2 : 4g^2T^2$; quartus terminus exprimit quadratum celeritatis acquisitæ tempore T per spatium $S = gT^2$. Erit igitur ipsa celeritas finalis $= 2gT = \frac{2.181}{60} = \frac{181}{30} = 6'' \frac{1}{30}$ tantum ergo spatii conficit grave intra 1'' ea celeritate, quam acquirit cadendo intra 1'''.

Si celeritas finalis per gravitatem terrestrem acquisita dicatur C; ea semper erit $= 2gT$, *nam* $S = gT^2$; & $C = \frac{2S}{T}$; *unde substituendo in hac formula valorem æquipollentem valori S, erit* $C = \frac{2gT^2}{T} = 2gT$. *Curandum vero ut tempus T sumatur in minutis secundis sive per quantitatem integram, sive fractam, & spatium confectum in digitis; qua mensura exprimitur spatium g.*

Problema V. *Datis spatiis motu uniformiter accelerato intra datum tempus confectis, invenire rationem virium*

rium acceleratricium. Resolutio. Ex §. XCV. n. I. vires acceleratrices sunt in ratione composita ex directa spatiorum, & reciproca duplicata temporum. Constat calculo astronomico ex observationibus eruto, lunam intra minutum primum ($=60''$:) versus terram circiter descendere per 181 dig. Contra prope superficiem terræ corpus terrestre idem spatium emetitur intra $1''$. Quare, si vis acceleratrix lunæ in terram, spatium ab ea confectum, & tempus sint V, S, T; vis acceleratrix corporis prope superficiem terræ positi, spatium, & tempus sint u, s, t, erit $V : u = \frac{S}{T^2} : \frac{s}{t^2} = \frac{181}{60^2} : \frac{181}{1} = 60^2 : 1$. Constat præterea, distantiam corporis prope superficiem terræ a centro terræ esse ad distantiam lunæ ab eadem, ut $1 : 60$. Dicatur illa d: hæc D; erit $1 : 60 = d : D$; consequenter $1 : 60^2 = d^2 : D^2$; Si hæc ratio comparetur cum ratione virium, fit $V : u = d^2 : D^2$; hoc est vires acceleratrices lunæ in terram, & alterius corporis prope superficiem terræ positi, sunt reciproce, ut quadrata distantiarum a centro terræ, in quod tendunt. Sed infra de hac ipsa vi acceleratrice lunæ in terram redibit sermo.

§. XCVII.

Observatio. Theoria motus uniformiter accelerati ad conflictum corporum in primis imperfecte elasticorum adplicari potest; Nam compressio corporum elasticorum, quando inter se confligunt, fit motu retardato: restitutio motu accelerato; quando enim particulæ *anteriores* corporis elastici resistentiam ab altero, in quod incurrunt, iam sentiunt, particulæ posteriores adhuc accedere sed motu uniformiter retardato (saltem si corpus elasticum satis homogeneum sit) pergunt, donec tota, quæ ab incurrente fieri potest, peracta compressio est, dum nimirum utriusque corporis evadit æqualis, vel tota corporis incurrentis, si in obicem immobilem incidit, celeritas eliditur. Quamprimum tota

com-

compreſſio partium corporis elaſtici peracta eſt; mox, ut figura paulatim reſtituatur, elaſticitas efficit; qua incitatæ particulæ primo poſteriores, mox anteriores motu uniformiter accelerato ad priorem figuram redeunt, & quidem, ſi elaſticitas perfecta eſt, motus in regreſſu partium eadem vi accelerabitur, qua in acceſſu, & compreſſione fuit retardatus: ſi elaſticitas fuerit imperfecta, minor erit vis acceleratrix in regreſſu partium & figuræ reſtitutione, quam erat vis retardatrix in partium acceſſu, & compreſſione. Patet igitur, quomodo theoria motus uniformiter accelerati ad hunc locum adplicari poſſit, ſecundum quam vires acceleratrices ſunt directe, ut quadrata celeritatum, quas gignunt, & reciproce ut ſpatia emenſa. §. XCV. n. I. Porro ſive elaſticitas corporum perfecta ſit, ſive imperfecta, ſpatia emenſa eadem ſunt, quia corpus utroque caſu priorem figuram penitus recuperare ponitur; proindeque particulæ ad regreſſum determinatæ idem ſpatium emetiuntur; Erunt igitur vires elaſticitatum, ut quadrata celeritatum, quas producunt, hoc eſt, vis elaſticitatis perfectæ V ad vim elaſticitatis imperfectæ u, ut quadratum celeritatis C, quam corpus in reſtitutione figuræ ab elaſticitate perfecta acquirit, ad quadratum celeritatis c, quam in reſtitutione figuræ acquirit ab elaſticitate imperfecta; unde ſequitur, celeritates acquiſitas eſſe viciſſim in ratione ſubduplicata virium acceleratricium, ſeu $C : c = \sqrt{V} : \sqrt{u}$, hoc eſt, ſi vis elaſticitatis perfectæ eſt quadruplo, vel noncuplo maior, quam vis elaſticitatis imperfectæ, erit celeritas genita a priore duplo, vel triplo maior, quam celeritas genita a poſteriore, gignitur autem tam in compreſſione, quam reſtitutione figuræ celeritas in incurrente ſecundum directionem contrariam, in impulſo ſecundum directionem incurrentis (ſumendo incurrens, & impulſum corpus eo, quo §. LXI. Schol.) ſignificavi, ſenſu.

§. XCVIII.

Problema VI. *Invenire generalem expreſſionem celeritatis in conflictu corporum genitæ, ſive perfecta elaſticitate, ſive imperfecta, ſive nulla ſint prædita.* Reſ.

I. Sumatur corpus imperfecte elasticum; cuiusmodi sunt omnia, quae in natura sunt, si stricte loquamur; ex dictis celeritas C genita per vim elasticitatis perfectae V, ad celeritatem c genitam per vim elasticitatis imperfectae u est in ratione subduplicata virium V, & u, ut sit

$$C : c = \surd V : \surd u.$$

Porro loco primi, & tertii termini substituantur valores alii aequales. Quantitas C sive celeritas ab elasticitate perfecta genita aequatur celeritati in incursu, sive in compressione genitae, atque haec celeritas in incursu seu prima periodo genita eadem est, sive corpus sit perfecte, sive imperfecte elasticum. Dein quantitas V seu vis elasticitatis perfectae est aequalis vi comprimenti (§. LXVIII.) haec vis comprimens iterum eadem est, sive corpus perfecte, sive imperfecte elasticum ponatur; igitur quantitas V etiam vim denotat, qua corpus imperfecte elasticum comprimitur, & u vim, qua figura restituitur; Igitur sensus superioris analogiae hic est: *Velocitas in corporum incursu, vel compressione figurae genita, est ad velocitatem genitam in figurae restitutione in constante quadam ratione nempe subduplicata virium compressionis ad vires restitutionis figurae.*

2. Sit haec ratio virium subduplicata $= m : n$; quia velocitas in restitutione figurae genita eandem habet directionem, quam habet velocitas in incursu, seu figurae compressione genita; erit velocitas genita in solo incursu ad velocitatem genitam in incursu seu compressione, & restitutione simul, sive ad velocitatem genitam in utraque periodo conflictus, ut $m : m + n$. Sit velocitas in incursu, vel compressione genita $= 1$, erit $m : m + n = 1 : \frac{m + n}{m}$; quartus terminus, qui dicatur r, exprimit velocitatem genitam in utraque conflictus periodo;

3. Quoniam in corporibus non elasticis, id est, in duris, ac mollibus nulla vis adest ad recuperandam figuram; erit in iis $n = o$, ac proinde $r = \frac{m}{m} = 1$. In

perfecte elasticis velocitas genita in una periodo est ad velocitatem genitam in utraque simul ut 1:2. (§. LXVIII. & LXXII.) quia in his corpora eadem vi se restituunt, qua comprimuntur; hinc erit $n = m$, & si ponitur $m = 1$; erit $m + n = 2$; adeoque $r = 2$. In corporibus denique imperfecte elasticis; quia velocitas genita in recuperanda figura minor est ea, quæ in amittenda gignitur, erit quantitas r maior, quam 1, & minor, quam 2.

4. Ut habeantur velocitates in conflictu genitæ pro omni casu corporum sive non elasticorum, sive elasticorum, perfecte, aut imperfecte, formulæ §. LXXII. exhibitæ multiplicentur per r; eritque pro omni casu

velocitas ab incurrente amissa $= \dfrac{r\,m\,C \mp r\,m\,c}{M + m}$, &

velocitas acquisita ab impulso $= \dfrac{r\,M\,C \mp r\,M\,c}{M + m}$; atque hæ formulæ generalissimæ sunt, nimirum posito $r = 1$ in duris, ac mollibus; posito $r = 2$ in perfecte elasticis; posito r cuiuscunque intermedii valoris in imperfecte elasticis.

Ex velocitate amissa ab incurrente, & ab impulso acquisita porro & quantitas motus amissa vel acquisita, tum & celeritas, ac motus quantitas post conflictum colligitur, quemadmodum ex III & IV capite huius Sectionis manifestum est.

CAPUT VII.

De Corporum Descensu per Plana Inclinata.

Hoc quidem loco, siqua in re, fœcunditas principiorum; quæ de resolutione virium, & proxime de vi acceleratrice diversa stabilivimus, tum commodum analyticarum formularum apertissime a quovis intelligetur; ut adeo siquid in numero corollariorum, ac theo-

rematum satis magno, quem allaturi sumus, obscurum, arduumve videatur, id soli ingeniorum levitati, qua prima quævis, maximique usus principia perfunctorie lustrari, ac percurri solent, adscribi debeat.

§. XCIX.

Definitio I. *Plana*, vel *superficies planæ*, de quibus hic agimus, passim repræsentari per lineas solent; nam superficies plana est magnitudo solum longa, & lata, profunditatis, omnisque crassitiei expers, ex cuius quovis puncto ad quodvis aliud punctum duci potest linea recta, cuius singula puncta in superficie sita sunt. Et quoniam vi huius notionis extrema obumbrant omnia media; idcirco extremi duntaxat limites planorum, sive lineæ exhibentur.

§. C.

Definitio II. Quodvis planum dicitur ad alterum *inclinari*; si angulus, quem comprehendunt, est minor recto; atque is est *angulus inclinationis planorum*, qui maxime spectatur hoc loco. Referimus inclinationem dati plani potissimum ad planum horizontale, ita, ut altitudo dati plani sit perpendiculum ex suprema illius ora in planum horizontale demissum, quod exhibet directionem gravium. Præterea ponuntur plana perfecte lævia, ac corpora iis imposita adcurate sphærica, ut omnis affrictus, de quo alio loco est differendum, excludatur.

§. CI.

Definitio III. *Vis absoluta* corporis dicitur, quæ omni impedimento caret, maximumque effectum, quem potest, edit; uti si corpus P in planum M N (F.II.T.I.) normaliter incidat: *vis relativa* vel *comparativa* est, quæ impeditur qadam parte, cum se exerit nec maximum, quem potest, effectum edit. Sic vis, qua corpus directione P O incedens, agit in planum S V, est relativa; exprimitur enim recta P C quæ minor est recta P O normali ad planum M N.

§.

§. CII.

Propositio. *Si* (F.XIX.) *in triangulo rectangulo ABC hypothenusa AC planum quoddam repraesentet, basis BC lineam, vel planum horizontale, altitudo AB altitudinem plani, & directionem gravium; erit vis absoluta corporis gravis plano impositi ad vim relativam, qua descendit per planum, ut longitudo plani ad altitudinem: ad vim pressivam vero, qua premit in planum, ut longitudo ad basin.* Dicantur vis absoluta V, relativa u, pressiva w. Longitudo plani L, altitudo A, basis B; dico esse

$$V : u = L : A$$

& $$V : w = L : B.$$

Demonstr. I. Imponatur plano sphaera P, ex cuius centro concipiatur ducta recta P f ad horizontem normalis, & recta P m normalis ad planum A C, compleaturque parallelogrammum m n. Dum corpus vi gravitatis suae solicitatur directione P f, quae ad planum A C obliqua est, exprimet vim absolutam gravitatis ipsa recta P f; vim & directionem, qua agit in planum, quaque planum resistit, seu vim pressivam recta P m ad planum normalis: vim autem, qua nititur descendere secundum directionem plano parallelam recta P n, vel m f. Est igitur vis absoluta ad vim pressivam, seu

$$V : w = Pf : Pm$$

& vis absoluta ad vim relativam, seu

$$V : u = Pf : mf.$$

2. Quoniam P f est parallela ad A B, erunt anguli alterni B A C, P f m aequales; & quia praeterea anguli ad B, & m recti sunt, triangula A B C, & P f m sunt similia; est igitur ex Elem.

$$Pf : Pm = AC : BC = L : B.$$

& $$Pf : mf = AC : AB = L : A$$

3. Comparatis rationibus huius, & superioris numeri, fiet

$$V : w = L : B$$

& $$V : u = L : A.$$ Q. e. d.

§. CIII.

Corollarium I. *Vis absoluta corporis plano inclinato impositi ad vim relativam etiam est ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis, & ad vim pressivam, ut sinus totus ad cosinum anguli inclinationis.* Nam si hypotenusa A C sumitur pro sinu toto, erit altitudo A B sinus anguli inclinationis A C B, & basis plani B C cosinus eius anguli. Sit radius, vel sinus totus = 1; erit

A C: AB (V: u) = 1 : Sin. ang. inclinat.
& A C: B C (V: w) = 1 : Cos. ang. inclinat.

Si angulus inclinationis ita crescit, ut infinite parum differat a recto, angulus B A C erit infinite parvus, ac latus B C, adeoque etiam vis pressiva evanescet: hoc est, grave plano verticali admotum vi gravitatis in illud non premit. Si e contrario angulus inclinationis fit infinite parvus, eiusdem sinus, adeoque & vis relativa evanescet: contra vero cosinus fit æqualis radio, hoc est corpus grave eo casu tota sua vi premit in planum, vis autem secundum longitudinem plani, quæ hoc casu cum plano horizontali congruit, nulla est.

§. CIV.

Corollarium II. Quodcunque corpus cuiuscunque massæ plano incumbat, semper eadem, quam demonstravimus, erit ratio vis absolutæ ad relativam; igitur duntaxat de vi acceleratrice sermo hic est, quæ in omni corpore terrestri in eodem terræ loco censetur eadem; quia, ut adnotavimus §. XCI. n. III. omnia corpora in vacuo æquali celeritate decidunt; Est igitur, quæcunque adsumatur massa, V constans, si de celeritate, spatio confecto, tempore descensus per planum agitur. At cum vis pressiva determinatur, fere ratio haberi massæ solet, quia planum totam pressionis vim ex vi singulorum elementorum conflatam sustentat.

§. CV.

Corollarium III. *Vis relativa in diversis planis est in ratione composita ex directa altitudinum, & reciproca*

lon-

longitudinum. Cum enim sit $V : u = L : A$, erit $u = \frac{VA}{L}$. Sit præterea aliud planum inclinatum; eius longitudo l, altitudo a; vis relativa corporis in eo positi m: vis absoluta V constans, uti paulo ante adnotavi; erit $V : m = l : a$; & $m = \frac{Va}{l}$; consequenter $u : m = \frac{VA}{L} : \frac{Va}{l}$, seu dividendo per V, $u : m = \frac{A}{L} : \frac{a}{l}$. Hinc 1. Si longitudines planorum eædem, altitudines diversæ sunt, vires relativæ sunt ut altitudines. 2. Si altitudines eædem, longitudines diversæ sunt, vires relativæ sunt reciproce ut longitudines. 3. In planis similibus vires relativæ sunt eædem; si enim similia sunt plana, erit $A : a = L : l$, proinde $\frac{A}{L} = \frac{a}{l}$, consequenter etiam $u = m$. 4. Vicissim si vires relativæ in diversis planis sunt eædem, concluditur, ea plana similia esse; nam si $u = m$, erit $\frac{A}{L} = \frac{a}{l}$, proinde $A : a = L : l$.

§. CVI.

Corollarium IV. *Vires pressivæ in diversis planis sunt in ratione composita ex directa ponderis incumbentis & baseos, & reciproca longitudinis.* Sit loco V pondus absolutum P, erit ex Prop.

$$P : w = L : B.\quad w = \frac{PB}{L}.$$

Sit aliud planum inclinatum, cui incumbat pondus p; plani basis sit b, longitudo l; vis pressiva ponderis sit n; erit

$$p : n = l : b. \; n = \frac{pb}{l}.$$

consequenter $$w : n = \frac{PB}{L} : \frac{pb}{l}.$$

§. CVII.

Corollarium V. *Vis relativa, & pressiva in decursu per totam longitudinem eiusdem plani est constans.* Pertingat enim sphæra P in D. Fig. cit. Erit in puncto quovis D vis absoluta ad relativam, ut DC : DE, & ad pressivam, ut DC : EC; Est autem ob similitudinem triangulorum A B C, D E C, DC : EC = AC : A B = L : A; & DC : EC = AC : BC = L : B. Eandem igitur in quovis puncto plani rationem vis relativa ad absolutam habet: hæc constans est ex cor. II. Consequenter illa quoque est constans; uti & vis pressiva ob rationem eandem. Hinc vero per sese fluit.

§. CVIII.

Corollarium VI. *Grave per planum inclinatum descendit motu uniformiter accelerato.* Nam vis absoluta est vis acceleratrix, sive continuo agens, eiusque directio in quovis plani puncto est obliqua; igitur continuo resolvetur in vim relativam plano parallelam, & pressivam seu normalem ad planum; præterea vis relativa in quovis puncto plani est constans; igitur est vis acceleratrix constans, qua motus deorsum uniformiter accelerari, & motus sursum uniformiter retardari debeat. Omnia igitur theoremata, quæ de vi acceleratrice constante allata sunt, ad descensum corporum per plana transferri debent, qualia sunt $S = \frac{CT}{2} = T^2$. $T = \sqrt{S}$. $C = T$. Pariter exemplum modo habetur binarum virium, quarum utraque acceleratrix, & constans; altera tamen alteri inæqualis est; quapropter formulæ §. XCV. exhibitæ huc pertinent: ex quibus theoremata de celeritatibus corporum per plana descendentium, de spatiis

con-

confectis, & temporibus descensuum prono alveo derivantur.

§. CIX.

Theoremata de Celeritatibus.

I. *Corpus descendens per planum inclinatum eam in fine acquirit celeritatem, qua eodem tempore, quo descendit, posset motu æquabili duplum spatium, sive duplam longitudinem percurrere*; nam $C = \frac{2S}{T}$. §. LXXXIV.

II. *Celeritas in descensu per planum inclinatum acquisita est ad celeritatem eodem tempore acquisitam descensu libero, seu verticali, ut altitudo ad longitudinem.* Utraque enim vis & absoluta, & relativa est acceleratrix constans; erit igitur celeritas genita ut vis & tempus coniunctim, sive $C = VT$ (§. XCV.) cumque tempus ponatur utrinque idem, erit celeritas uti vis; universe mensura & effectus virium acceleratricium sunt celeritates intra æqualia tempora productæ. Si comparetur celeritas corporis in uno plano acquisita cum celeritate acquisita in alio, manebit ratio virium relativarum in diversis planis (§. CV.)

III. *Corpus descendens per planum inclinatum eam in fine acquirit celeritatem, quam acquisivisset descensu verticali per altitudinem eiusdem plani.* Sit celeritas acquisita in descensu per longitudinem plani C; celeritas per altitudinem acquisita K. Quoniam (XCV. n. II.) spatia confecta per vires acceleratrices diversas sunt in ratione composita ex duplicata celeritatum, & reciproca virium, erunt quadrata celeritatum ut spatia & vires coniunctim, ac proin celeritates in ratione spatiorum, & virium subduplicata, h. e. $C = \sqrt{SV}$. Sit vis absoluta per altitudinem plani V, spatium per eam confectum, nempe ipsa altitudo plani A; vis relativa u, spatium ab ea percursum, nempe longitudo plani L; erit secundum formulam $C = \sqrt{SV}$,

$$C : K = \sqrt{Lu} : \sqrt{AV}.$$

Est autem $u : V = A : L$ (§. CII.) & $\sqrt{u} : \sqrt{V} = \sqrt{A} : \sqrt{L}$; facta ergo substitutione (§. XVI. n. III.)

erit $C : K = \sqrt{LA} : \sqrt{LA}$; quæ eſt ratio æqualitatis.

Patet, celeritates in deſcenſu per diverſa plana acquiſitas eſſe easdem, quæ per altitudines reſpondentes acquirerentur; celeritates vero in deſcenſu per diverſas altitudines acquiſitæ ſunt in ratione ſubduplicata altitudinum (§. LXXXVII.) in eadem igitur ratione ſunt celeritates in deſcenſu per diverſa plana acquiſitæ.

§. CX.

Theoremata de Spatiis.

I. *Spatia in deſcenſu per idem planum ab initio motus computata creſcunt ut quadrata temporum, vel celeritatum.* Nam motus uniformiter acceleratur.

II. *Spatium in plano inclinato confectum eſt ad ſpatium eodem tempore percurſum motu verticali, ut altitudo plani ad longitudinem.* Nam ſi vires acceleratrices ſunt diverſæ ſpatia, ſunt in ratione compoſita ex directa ſimplice virium & duplicata temporum, h. e. $S = V T^2$ (§. XCV. n. II.) cum igitur ex hypotheſi tempus ſit idem, ſeu conſtans, erit $S = V$, ſive ſpatia *eodem tempore* confecta per vim relativam, & abſolutam ſunt, ut ipſæ vires, nempe ut altitudo ad longitudinem.

III. *Spatia in diverſis planis inclinatis æquali tempore percurſa, ſi ab initio computentur, ſunt in ratione directa altitudinum, & reciproca longitudinum.* Si enim tempus eſt conſtans, ſpatia ſunt ut vires; eſt autem hæc ipſa ratio virium (§. CV.)

§. CXI.

Theoremata de Temporibus.

I. *Tempus deſcenſus per altitudinem plani eſt ad tempus deſcenſus per longitudinem, ut altitudo ad longitudinem.* Sit R tempus deſcenſus vi abſoluta V per altitudinem plani A. T ſit tempus per longitudinem; erit ex formula $V = \frac{S}{T^2}$ (§. XCV. n. I.) $V : u\ (L : A) =$

$= \frac{A}{R^2} : \frac{L}{T^2}$; proin factum extremorum $\frac{L^2}{T^2} = \frac{A^2}{R^2}$ facto mediorum; unde habetur proportio $R^2 : T^2 = A^2 : L^2$, ac $R : T = A : L$.

II. *Tempora descensus per diversa plana sunt in ratione composita ex directa longitudinum, & reciproca subduplicata altitudinum.* Sint vires relativae, tempora, longitudines, & altitudines binorum planorum u, T, L, A & m, t, l, a. Quoniam spatia confecta ipsae longitudines planorum sunt, erit secundum formulam $V = \frac{S}{T^2}$ (§.XCV. n. I.

$$u : m = \frac{L}{T^2} : \frac{l}{t^2}$$

ex §. CV. $u : m = \frac{A}{L} : \frac{a}{l}$

hinc fit $\frac{L}{T^2} : \frac{l}{t^2} = \frac{A}{L} : \frac{a}{l}$

& $T^2 : t^2 = \frac{L^2}{A} : \frac{l^2}{a}$

consequenter $T : t = \frac{L}{\sqrt{A}} : \frac{l}{\sqrt{a}}$. Q. e. d.

Qui formulas tractare novit, facile videt, quae sit temporum ratio, si longitudines vel altitudines ponuntur eaedem. Unum adiungam; sint bina plana eiusdem longitudinis, diversae altitudinis, ut fit $L = l = 1$. Dico empora descensuum in hac hyp. esse in ratione reciproca subduplicata virium relativarum; erit enim $T : t = \frac{1}{\sqrt{A}} : \frac{1}{\sqrt{a}}$. Porro si longitudo est eadem, vires relativae sunt ut altitudines (§. CV. n. I.) nempe $u : m = A : a$, & $\sqrt{u} : \sqrt{m} = \sqrt{A} : \sqrt{a}$; si igitur va-

valor virium in ratione temporum mox indicata substituitur, erit

$$T : t = \frac{1}{\sqrt{u}} : \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Animadversione digna est constans ratio inter vires absolutas, & relativas, inter celeritates ab iisdem æquali tempore genitas, inter spatia æquali itidem tempore per eas confecta; hæc enim omnia sunt ut longitudo plani ad altitudinem: tempus vero per altitudinem est ad tempus per longitudinem ut altitudo ad longitudinem. Cæterum qua breviore aut planiore via plura theoremata diduci possent, haud sane video; nec vero eorum copia molesta videri potest ei, qui propositionem fundamentalem, ac formulas de vi acceleratrice diversa recte perceperit. Exercitationis caussa & dubia quadam, & problemata nunc resolvam.

§. CXII.

Exercitatio.

I. *Sit (F. XX.) vectis recurvus, seu inclinatus in A, ita, ut si longitudo A C dividatur in quinque partes æquales, altitudo A B contineat quatuor, & basis B C tres eiusmodi partes: brachia vero A C & A D sint æqualia. In C ponatur pondus P, quod ope trochleæ in A connectatur cum pondere B; sitque aliud pondus in D. Ratio ponderis P ad pondus B sit ut 5 : 4; & ad pondus in D, ut 5 : 3. Teste experientia habebitur æquilibrium. At, inquiunt, intelligi nequit, quomodo pondus P ut 5 eodem tempore pondus B ut 4, & pondus D ut 3 sustinere possit; effectus enim maior videtur caussa.* R. Qui resolutionem virium non agnoscunt in natura, viderint, quid apte respondeant. Ego vero secundum theoriam de virium resolutione, & motu per plana inclinata aio, vim absolutam ponderis P plano incumbentis resolvi in binas vires, unam relativam plano parallelam, quæ est ad absolutam, ut altitudo ad longitudinem, alteram normalem versus planum, quæ est ut basis eiusdem plani. Cum igitur in dato vecte ratio altitudinis ad longitudinem ex hyp. sit, ut 4 : 5, idcirco pondus ut 5 per vim

vim relativam ut 4 sustentabit pondus B pariter ut 4: per vim autem pressivam, quae est ut basis, sive ex hyp. ut 3, aequilibrium tuebitur cum pondere opposito in D, ut 3. Observa quoniam vis ponderis D in brachium A D est normalis, & vis pressiva ponderis P in brachium A C pariter normalis, necesse est ad aequilibrium obtinendum, ut brachia A D, A C aequalia sint, quemadmodum ex theoria aequilibrii sectione proxima intelligetur.

II. Inquiunt: *nullus in hoc vecte actualis motus datur: igitur nulla motuum resolutio habet locum.* R. c. a. n. c. Virium resolutio concipi potest, ac debet, sive corpora duntaxat nitantur ad motum, sive moveantur reipsa; quia actualis motus sublato impedimento, oritur ex ipso nisu, sive determinatione, quam habent corpora, sequiturque celeritas, & directio haec potius, quam alia, quia hic potius, quam alius nisus vel determinatio ad motum corpori inesse concipitur. Nihil igitur inter motum, ac nisum ad motum, inter percussionem, & pressionem hoc quidem respectu interest. Quemadmodum igitur, siquod corpus oblique percutit planum, eius vis absoluta in vim parallelam, & normalem ad planum resolvenda est; ita idem contingit, si vi gravitatis descendat, vel nitatur descendere per planum; nam perinde est, utrum ponas planum horizonti perpendiculare, & directionem motus obliquam, an directionem motus horizonti perpendicularem, qualis est directio gravitatis absolutae, & planum obliquum, sive ad horizontem inclinatum; utroque enim casu directio virium ad datum planum obliqua est, ac proin resolvenda, ut intelligatur, quae sit vis plano parallela, quae normalis.

III. *Mobile retardatur in descensu per plana: igitur motus non potest uniformiter accelerari.* R. d. a. excluso affrictu (ut pono) mobile retardatur, quatenus vis relativa in quovis puncto longitudinis plani est minor vi absoluta, c. a. quatenus ipsa vis relativa non manet constans, n. a, & c. (§. CVII.)

IV. *In motu uniformiter accelerato spatia sunt ut quadrata temporum; igitur non satis intelligitur, quomodo*

do eadem sunt ut vires vel ut altitudo ad longitudinem. (§. CX. n. II.) R. d. Spatia vi acceleratrice *eadem* confecta sunt ut quadrata temporum, si ab initio computantur, . C. Si comparatio fiat inter spatia confecta per vires diversas, n. Et spatia confecta per longitudinem plani, & spatia confecta in linea verticali crescunt, ut quadrata temporum; at si spatia vis absolutæ referuntur ad spatia vis relativæ; alia est eorundem inter se ratio, quemadmodum exposui cit. §.

V. *Celeritas finalis in descensu per altitudinem, & longitudinem plani non potest esse eadem; quia vis absoluta, quæ agit in descensu per altitudinem maior est, ac maiorem gignit celeritatem, quam vis relativa agens secundum longitudinem plani: igitur vitium fortassis inest in demonstratione theorematis III. §. CIX.* R. n. rationem additam d. vis absoluta maior est, quam relativa, sed tanto minore tempore agit mobile deferendo per altitudinem plani, c. non agit minore tempore n. Vis absoluta ad relativam est ut longitudo ad altitudinem: tempus, quo agit vis absoluta mobile deferendo per altitudinem est ad tempus, quo agit vis relativa illud deferendo per longitudinem, ut altitudo ad longitudinem; igitur vires & tempora sunt in ratione inversa seu reciproca; ob quam caussam celeritates ab iis viribus genitæ necessario æquales evadunt; nam (§. XCV.) $C = V T$, seu $C : c = V T : u t$. Quapropter si vires & tempora reciprocant, ut sit $V : u = t : T$, proindeque $V T = u t$, necessario erit $C = c$.

VI. *Si gravitas seu vis relativa minor est vi absoluta cur difficilius currus e. g. sursum per viam acclivem trahitur, quam in plano horizontali?* R. 1. Citius tamen per viam acclivem trahitur currus, aut quodvis pondus, quam directione verticali sursum; quod non fieret, nisi vis relativa minor, quam absoluta foret. 2. Dum currus per viam acclivem trahitur, superanda est *primo* inertia massæ, *secundo* gravitas relativa, tertio affrictus; directioni autem horizontali vis relativa omnino non obsistit; est enim hæc vis relativa, ut sinus anguli inclinationis, qui evanescit, si planum ponitur horizontale (§. CIII.) Sane siquod pondus suspensum

ex

ex fune pendeat, multo id facilius per arcum quemdam minimum, qui nihil fere a linea horizontali differt, quam directe, vel oblique sursum movetur; quod indicio est, non vim relativam, sed inertiam massæ & affrictum superandum esse, si corpus in plano horizontali moyetur, & protruditur. Sed hæc quidem alium sibi locum vendicant; quæ supra attulimus, duntaxat exercitationis gratia commemoravimus. In eundem finem adcommodata sunt sequentia problemata.

§. CXIII.

Problema I. *Data altitudine, & longitudine plani invenire spatium, quod corpus in plano percurrit eo tempore, quo vi absoluta descendit per altitudinem eiusdem.* Resolutio. Spatia vi absoluta, & relativa *eodem tempore* confecta, sunt ut longitudo ad altitudinem (§. CX. n. II.) igitur fiat: ut longitudo plani ad altitudinem; ita spatium vi absoluta confectum, quod ex hyp. est ipsa altitudo, ad spatium eodem tempore confectum in plano vi relativa; quapropter ut istuc spatium determinetur, ex angulo recto B (F. XXI.) agatur normalis BF in longitudinem AC, eaque designabit punctum F, quod corpus ex A descendens attingit eo tempore, quo vi absoluta altitudinem emetitur. Nam ex elem. si ex angulo recto demittitur normalis in hypothenusam, segmentum AF est tertia proportionalis ad hypothenusam seu longitudinem AC, & latus adiacens AB; quæ est altitudo plani.

§. CXIV.

Corollarium. Non est prætereunda hoc loco elegantissima propositio, quæ ex solutione huius problematis facillime intelligitur: *corpus per omnes chordas eiusdem circuli æquali tempore descendit, nimirum eo, quo vi absoluta descenderet per diametrum circuli.* Sint enim F. XXII. plana AC, AD, AE eiusdem altitudinis AB, quæ est diameter circuli, quia spatium in plano conficiendum eo tempore, quo altitudo plani, sive diameter AB percurritur, determinatur a perpendiculo ex angulo recto in

in planum demiſſo, & quia omnia perpendicula in plana A C, A D, A E demiſſa in peripheriam circuli cadunt, cum angulus in ſemicirculo ſemper rectus ſit, hinc corpus eo tempore, quo diametrum percurrit in plano A C perveniet usque ad c, in plano A D usque ad d in plano A E usque ad e, hoc eſt, chordas A c, A d, A e, eodem tempore percurret, quo diametrum A B. Similiter oſtenditur, chordas B c, B d, B e eodem omnes tempore percurri, quod ex ſola inverſione figuræ manifeſtum eſt; ac proinde corpus eodem quoque tempore ex c perveniet in B, quo ex d, vel e in B pervenit; nam tempus ex c in B æquale eſt tempori ex B in c, ſi figura invertitur, cum longitudo c B ſit eadem, & angulus inclinationis c B E ſit æqualis angulo alterno B x A.

§. CXV.

Problema II. *Datis longitudine, & altitudine plani, ac ſpatio in eo confecto, invenire, quantum ſpatii corpus eodem tempore motu verticali conficeret.* Reſolutio. Spatium vis relativæ eſt ad ſpatium vis abſolutæ (ſi tempora æqualia ſunt) ut altitudo ad longitudinem plani (§. CX. n. II.) Eſt igitur quæſitum ſpatium motu verticali conficiendum, quartus terminus proportionalis ad altitudinem, & longitudinem plani, ac datum ſpatium in plano confectum. Sit F. XXIII. hoc ſpatium in plano A C confectum pars A F: ad F fiat normalis F f; punctum f determinabit ſpatium verticale A f vi abſoluta confectum eo tempore, quo in plano percurritur pars A F; cum enim triangula A B C, A F f ſimilia ſint ob angulos ad B, & F rectos, & ad A communem, erit A B : A C = A F : A f, h. e. Ut altitudo ad longitudinem plani; ita ſpatium A F vi relativa percurſum ad ſpatium A f eodem tempore percurſum vi abſoluta. Si pro ſpatio vis relativæ detur tota longitudo plani A C, quæratur ex eadem ratione tertia proportionalis ad altitudinem, & longitudinem; & invenietur A C; cum enim angulus A C c ſit rectus ex conſtructione, ſicut antea ad F, & C B ex eodem normaliter demiſſa in hypothenuſam A c, erit hæc recta A c tertia propor-

tio-

tionalis ad altitudinem sive segmentum A B lateri A C adiacens, & ad hoc ipsum latus A C.

Scholion Generale.

I. Principium explicandorum motuum ab æquabili, ac simplici motu sumsimus, in quem deinceps omnes alii motus minime æquabiles, & simplices, sed maxime compositi, & accelerati vel retardati, & curvilinei resolvuntur ope tempusculorum infinitesimorum, quemadmodum suo loco declarabitur. Ex sola idea celeritatis, quæ nemini obscura esse potest, primigenia formula de illo motu, eaque maxime fæcunda nascitur. Ac quivis intelligit, si præcise celeritatis corporum habeatur ratio, quodvis etiam corpus instar puncti geometrici spectari posse, quod motu suo vel fluxu lineam describit, qua spatium confectum exprimitur; dimensio enim corporis utcunque extensi, cuius omnes partes eadem celeritate incedunt, ad maiorem, minoremve celeritatem per sese nil confert. Eadem recta, quæ spatium repræsentat quodam tempore percursum, si sine relatione ad tempus sumitur, exhibet directionem motus, secundum quam progreditur mobile, vel progrederetur certe quidem, nisi aliæ intervenirent caussæ motum, vel directionem mutantes. Est autem directio corporis in eadem recta, in quam vis impressa tendit: Tempus quoque, cum sit quantum, ac penitus similare, atque unius duntaxat dimensionis, nempe in longum, repræsentari lineis solet, & in theoria motus uniformiter accelerati per abscissas trianguli rectanguli designatur; nam & temporis, & linearum rectarum omnes partes toti, ac inter se similes sunt, sola differunt magnitudine; & sicut linea fluxu puncti generatur; ita hic fluxus, si ut æquabilis concipitur, idearum successionem, & temporis ideam ingerit. Cum vero linea, ac proin spatium quoque motu confectum, & tempus, intra quod conficitur, in partes æquales dividi, eædemque numeris exhiberi queant, patet profecto; quomodo & ipsa celeritas exhiberi numeris possit, & debeat; quemadmodum in solutione problematum ad motum æquabilem pertinentium a nobis factum est,

est, ubi numeris prae literis usi sumus, quia particularium casuum solutionibus fere magis delectari solemus. Qui in calculo literali paullum modo versatus est, statim videt, literas substitui posse nostris numeris, adeoque solutiones generales esse. Quae hoc numero commemoravi, eo pertinent, ut intelligatur, quanta inter motum, & dimensiones Geometriae ac Arithmetices numeros analogia, & veluti affinitas sit: atqui omnia phoenomena motu constant, & motu perficiuntur; totaque naturae facies mathesin refert. Ineptiunt ergo, atque ignorantiam produnt, qui demonstrationes, calculos, schemata geometrica ex physica reiiciunt, atque ad aliam referunt disciplinam.

II. Fateor, solutiones problematum de aequabili & simplici motu supra allatorum praetermitti a quovis posse. At eaedem usum formularum, & commodum Arithmeticae universalis patefaciunt, & utilissimae exercitationis genus continent. Etsi enim non reiiciam ego quidem syllogismorum usum in Philosophiae institutionibus; tamen ad perficiendam cogitandi, atque attendendi vim, & ad cognitiones pulcherrimarum rerum comparandas solutionem unius problematis, vel theorematis demonstrationem, si adcurate, ordinateque fiant, multis syllogismorum repetitionibus, & distinctionibus praeferendam puto. Sine dubio rectissime fecerit, qui exercitationis genus modumque ipsi subiectae materiae adcommodarit, ut syllogismis dimicet, si res ferat istiusmodi pugnas, & operae pretium sit: saepe autem in demonstrationibus sese, aliosve adcurate exerceat.

III. Resolutio, & compositio motuum in Mechanica utramque paginam facit; si enim plures determinationes aut vires impressae in eadem recta conspirent, acceleratio: si in eadem recta sibi oppositae sint, retardatio motuum inde pendet; si angulum efficiunt, uti fere contingit, motus compositi, & rectilinei, & curvilinei omnes inde determinantur; ex eadem leges percussionis obliquae, motus reflexi, & refracti, motus per plana, atque ipsum virium contrariarum aequilibrium, & theoria vectis derivatur, quod sequente sectione ostendemus. In natura, cum praesertim vires corporum

mu-

mutuæ ſint, in idem mobile perpetuo plures determinationes concurrant neceſſe eſt, ut adeo motus ſimplex fere in ſolo præciſivo conceptu conſiſtat; ſed nempe quæ complicata ſunt & compoſita, analyſi indigent, ut, quid per ſingulas vires ſive inſitas, ſive extraneas fieri poſſit, debeatque, intelligatur. Hoc modo accelerationem, & retardationem motuum in medio non reſiſtente fieri concipimus; alia enim accelerationis & retardationis, alia reſiſtentiæ medii theoria eſt: in motu per plana affrictum, & imperfectionem ſphærarum deſcendentium, in machinarum theoria itidem affrictum, duritiem, imo & gravitatem funium, & vectis animo & cogitatione primo excludimus, ſeparatim poſtea de his acturi: in conflictu corporum concurrentium perfecte dura aut mollia, aut perfecte elaſtica, qualia nulla ſunt in univerſo fingimus, quæque ſunt iſtius generis alia, quæ ſeorſim expendimus, ut diſtincta phœnomenorum, ac completa ratio exponatur; nam in naturæ contemplatione, atque interpretatione non modo plurimæ obſervationes atque experimenta inſtituenda ſunt, ſed eadem inter ſe conferri debent, & ſimilia a diſſimilibus ſegregari, & in certas diſtribui claſſes, ex iisdem leges erui, quæ ad ſingulas eiusmodi claſſes pertineant: eædem leges erutæ cum novis phœnomenis conferendæ ſunt, ut magis ſtabiliantur, ſi cum illis congruant, aut corrigantur, donec omnia ſibi conſtent. Cæterum exempla compoſitionis, ac reſolutionis motuum paſſim ſe offerunt. Deſcenſus, vel aſcenſus per quamvis ſcalam motum quemdam transverſum, & alium, qui deorſum, vel ſurſum tendit, continet: imo quivis bipedum inceſſus quædam deſcriptio eſt diagonalis, dum uno pede verſus unum, altero verſus alterum parallelogrammi latus tenditur, atque ita via quadam media inceditur. Cum terra moveatur ab occaſu in ortum, & corpora quoque & animalia in terra poſita moveantur, perpetuo plures determinationes, & directiones concurrunt, ex quibus ſollicitatio quædam media exiſtit. Dum cymba trahitur ex utraque ripa adverſo flumine, per medium, ceu per diagonalem aſcendit. Qui ope cymbæ ad alterum ripæ latus tendunt, cum vi fluminis deorſum vehantur, ad partem ripæ altiorem ten-

dant necesse est, ut destinatum locum attingat. Qui moto ex curru prosilit, vim & suam, & a curru impressam in unam directionem diversam cogitur componere. In theatris scenici volatus ex duplici motu, transverso, & perpendiculari componuntur. Eadem motuum compositio intelligitur, si F. VII. concipias rectam P C æquabiliter, sibique semper parallelam transferri in D O, eodemque tempore muscam in recta P C ex P descendere in C; dum enim recta P C habebit situm m s, musca erit in r; dum acquirit situm D O, erit in O. Resolutio motuum, & compositio intelligitur, cum pondus unicum æquilibrium tuetur cum binis, vel pluribus aliis, si illud in directione diagonalis adplicatur, & vi ponderum compositæ, & contrariam directionem habenti æquipollet. Sic etiam vis simplex unius venti e. g. Euri flantis ab ortu æquivalet vi compositæ a binis ventis obliquis e. g. aquilonis flantis inter Eurum, & Boream, & noti inter Eurum & Austrum. Unicus homo vim ac conatum plurium ex parte quadam erumpentium sæpe sistit, dum directione quadam media obsistit reliquis.

IV. Inter corpora mollia & elastica, de quorum conflictu egimus, *innumerabiles* (ut Krafftius ait Præl. Acad. P. 2. C. VII. *continentur gradus intermedii eorum corporum, quæ impressiones acceptas ex parte tantum, non penitus exuunt*; *ad quorum classem sine dubio omnia corpora, quæ nobis obversantur, sunt referenda*; *non enim reperitur perfecte molle, nec etiam perfecte elasticum, sed omnia medii inter hæc generis esse deprehenduntur*. Cavendum autem; ne mollitiem, vel duritiem sola manuum nostrarum vi æstimemus; quis enim globum eburneum sensibiliter manu comprimat? idem tamen si per altitudinem aliquot pedum decidat in planum lapideum oleo vel sebo illitum, vestigium circulare multo maius efficit, quam efficere id posset, si non parte quadam ab ictu comprimeretur: similiter si unus globus fuligine vel atramento tinctus, in alterum non fucatum demittitur, post collisionem hic quoque adparet tinctus non in puncto quodam sed in ampliore circello, qui exprimit amplitudinem spatii complanati in globorum concursu, ac proinde compressionem eorundem; circel-

lus

lus ille solet esse maior vel minor pro maiore vel minore celeritate globi incurrentis. Ad leges conflictus experimentis confirmandas adhiberi solet *Machina percussoria* descripta a Keilio, Mariotto, Gravesandio, Krafftio, qui summam descriptionis in hunc modum complectitur: In assere ligneo F. XXIV. T. I. centris C & D describuntur duo arcus circulares A E, B F, qui chorda A 1 pro libitu assumta ita dividuntur, ut sit chorda A 2 prioris dupla, A 3 tripla, A 4 quadrupla, & sic porro. Si dein ex centris C & D suspendantur pendula A, & B, quæ sint corpora mollia, vel elastica cognitæ iam massæ, & si eorum unum elevetur ad numerum quemcunque veluti 5, idque sibi permittatur, descendet illico per arcum 5 A, & in linea verticali C A adipiscetur celeritatem ut 5, qua in alterum globum B incurrere, & sub celeritate quadam nota conflictum exercere potest; si igitur postea B ascendet ad numerum 2 e. g. intelligetur, hanc collisionem progenuisse celeritatem ut 2. Ratio a theoria pendulorum derivanda est, in qua demonstrabimus, celeritates in linea verticali, ubi fit alterius globi cum altero collisio, esse ut chordas subtendentes arcum percursum, ut si chorda E A est ut 5, erit celeritas in puncto infimo ut 5; si chorda est ut 4, celeritas pariter ut 4. Hac igitur in machina observatur: 1. Globos molles, quorum alter in alterum quiescentem, vel minore celeritate motum incurrit post conflictum manere coniunctos, adeoque communi celeritate ferri, quæ est ut $\frac{MC + mc}{M + m}$

§. LXIII. 2. Si æquali motus quantitate ex oppositis partibus sibi occurrunt, post conflictum quiescunt (§. LXVI. n. II.) si in ea hypothesi globi elastici sint, eadem vi, qua sibi occurrerunt, resilient (§. LXV. n. IV.) 3. Si globus elasticus, cuius massa $M = 3$. celeritas $C = 12$ incurrat in argillaceum, expertem elasticitatis & versus eandem partem tardius præcedentem, cuius massa $m = 2$, celeritas $c = 7$; ii facto conflictu coniuncti manent, & communi feruntur celeritate $= 10$. Sequuntur igitur corpora, quorum alterum elasticum est, alterum non item, leges corporum mollium, secundum

quas communis celeritas post conflictum est $\frac{MC + mc}{M + m}$ $= \frac{36 + 14}{5} = 10$. Nec id mirum; nam partes corporis mollis statim cedunt impressioni, nec post mutatam figuram se restituunt, nec ut alterum elasticum comprimi possit, satis resistentiæ habent: alius ergo effectus collisionis est, si elasticum cum duro; alius, si cum molli concurrit. §. LXIX. 5. Si plures suspenduntur globi elastici sese mutuo tangentes, quorum centra in eadem recta iacent, & primus in reliquos incurrat quavis celeritate, globi intermedii omnes quieti manent, & solus ultimus prosilit celeritate ea, quæ legibus elasticorum conformis est. Unde patet, admodum celerem esse elasticitatis actionem; reipsa enim omnes figuram successive mutant, sed quæ celerrime restituitur, ut nullus mutare locum videatur, nisi ultimus, cuius motui nihil obsistit. Similiter si ab initio duo, tres, vel plures globi in reliquos incurrant, prosiliunt duo, tres, vel plures ultimi quiescentibus mediis; de qua re agit Gravesandus Elem. Math. P.I. & Boscovichius n. 368. in suppl. L. 2. Phil. Stayan. Massæ quidem globorum pro usu machinæ percussoriæ definiuntur ex pondere: velocitates ex spatio confecto, id est, ex chordis arcui percurso subtensis. Experimenta tamen paullum turbat aeris resistentia. Newtonus cum singulari artificio, quod in Scholio post leges motus indicat, cavisset, ne ipsis experimentis obesset aeris resistentia, observavit, eadem theoriæ admodum consentanea esse, & si globi imperfecte elastici sibi occurrunt, velocitates recessus mutui a se invicem semper fuisse ad velocitatem accessus in ratione constante, ut indicavi §. XCVIII. n. I. Cæterum in hac corporum collisorum theoria optime denuo adhibentur formulæ algebraicæ, inquit Krafftius, *quia sine harum usu explicatio regularum in hoc negotio occurrentium prolixitate sua tædiosissima est; hoc autem algebræ usurpato artificio quasi uno obtutu hauriri potest.* Sit aliud exemplum collisionis elasticorum, ut formularum usus magis perspiciatur. Impingatur malleus, cu-

cuius massa M = 1 tt. Celeritas C = 51. in incudem, cuius massa m = 50 tt. Celeritas c ante impactum = 0; patet, esse hunc secundum conflictus casum, in quo m c = 0. In quo celeritas V corporis incurrentis seu mallei ex §. LXXIV. $= \frac{MC - mc}{M + m} = \frac{51. - 50.\,51}{51} = 1 - 50 = -49$. Hac igitur celeritate malleus repercutitur. Porro $u = \frac{2MC}{M+m} = \frac{2.\,51}{51} = 2$. quæ est celeritas incudi impressa. Unde ratio intelligitur, cur circulatores quidam humi iacentes incudem gravem pectori impositam malleis validissime percuti patiantur sine noxa aut dolore; celeritas enim incudi impressa e. g. 2, & versus pectus directa admodum parva est, ut sine damno sustineri queat.

V. Leibnitius instar principii sumsit, in toto hoc universo tot inter corporum conflictus eandem semper virium vivarum summam conservari, ut universum ipsum conservetur. Vires autem *vivas* ex massa ducta in quadratum celeritatis, mortuas ex massa ducta in celeritatem simplicem æstimat, ut summa virium ante conflictum fiat $= MC^2 \pm mc^2$; ac si in conflictu elasticorum celeritates V, & u (§. LXXIV.) eleventur ad quadrata, & ducantur in suas respective massas, invenietur ante & post conflictum summa constans, nempe $MC^2 \pm mc^2$, quod Hugenius primo animadvertit. In mollibus cum sit communis celeritas post conflictum $= \frac{MC \pm mc}{M + m}$; si hæc multiplicatur per utramque massam M + m, id est, si divisor in formula celeritatis removeatur, patet summam motuum ante & post conflictum esse eandem, nempe M C + m c in

primo quidem & secundo casu; in tertio cum sola maneat virium differentia, profecto summa non est constans, nisi ante conflictum motus secundum quamvis directionem e. g. corporis incurrentis, habeatur pro positivo, & secundum oppositam pro negativo, atque ita uterque computetur in eandem summam; sed reipsa quantitas motus — m c ante conflictum vere indicat vim vivam, perinde ac si esset + m c, neque directio quidquam obesse potest. Dein nec in imperfecte elasticis summa virium ante & post conflictum plane eadem est; perfecte autem elastica nulla novimus in natura; nihil igitur, inquit Krafftius pro Leibnitiana virium æstimatione ex quadrato celeritatis in massam concludi potest, nisi in mundo quodam imaginario, qui nihil contineat non elastici. Quærunt alii, an si corpus quiescens B ab incurrente A determinetur ad celeritatem finitam e. g. ut 6, ista mutatio status in B repente fiat, ita ut B a quiete a celeritatem ut 6 per saltum transeat, quin per intermedios gradus celeritatis 1, 2, 3, 4, 5 ad celeritatem ut 6 paulatim perveniat: saltum hunc pro monstro naturæ non nulli habent, alii haud ægre eum admittunt; quod attigisse hoc loco satis est; nihil enim nunc quidem ex inductione decidi potest, argumenta vero metaphysica in Philosophia experimentali locum non habent.

VI. de vi acceleratrice constante primum posuimus theoremata de spatiis $S = \frac{C\,T}{2}$, quia ex eo lex galilæana de spatiis intra singula tempora secundum numeros impares crescentibus aptissime videbatur consequi; nam intra primum minutum secundum, quod in plurima tempuscula minora dividitur, celeritas paulatim ita crescit, ut conficiantur gravitate terrestri 15 pedes, sub finem huius minuti celeritas, sive gradus quidam celeritatis iam acquisitus, ac completus est, isque vi inertiæ deinceps conservatur; proinde ob eundem, si altero minuto nihil ageret vis acceleratrix, conficeretur spatium prioris duplum nempe 2. 15 ped. ob novam autem gravitatis actionem iterum accedet pars spatii priori itidem æqualis, unde spatium secundo minuto confe-

fectum sit triplum primi nempe 3. 15. Ad initium tertii minuti ob duos celeritatis gradus iam completos confici debet spatium quadruplum primi, & ob novam gravitatis actionem pars spatii primo æqualis unde fiet spatium ut 5, nempe 5, 15. atque ita deinceps. Problemata, quæ de viribus acceleratricibus adiunximus, ad theoriam motus curvilinei percipiendam permagni momenti sunt. De notione & proprietatibus gravitatis, cum sola terrestris gravitas examinata sit, ac ne illa quidem perfecte hoc loco, differi in præsenti nil potest. Plana quoque composita ad pendulorum motum referemus, in cuius gratiam ea potissimum considerantur.

SECTIO III.

De Oppositione & Contrariis Actionibus Virium in Corporibus Solidis.

CAPUT I.

De Æquilibrio Corporum ad Vectem adplicatorum.

Præmissis notionibus, & postulatis propositionem unicam directam, eiusque inversam demonstrabimus, ex qua omnis theoria æquilibrii in vecte, & machinis, quæ ad vectem reducuntur, legesque generales statices, earumque adplicationes derivantur. Disceptationes quorundam Philosophorum de caussa ultima & physica æquilibrii ad calcem huius sectionis reiiciemus.

§. CXVI.

Definitio I. Vectis, si physice spectatur, est quævis pertica, aut virga rigida, cui potentia agens sub quodam angulo adplicatur ad producendum, vel impediendum motum corporis alterius.

In bilance virga ferrea, ex qua funes cum lancibus pendent, trabes oblongæ fulcris impositæ & oneratæ ponderibus, bacillus ligneus, ex quo sarcina super humeros gestatur, non nisi vectes sunt.

§. CXVII.

Definitio II. Æquilibrium est quies respectiva potentiarum in se mutuo agentium orta ex æqualitate, & oppositione virium earundem inter se. Dicitur *respectiva* quies, quoniam oppositio, & æqualitas virium, quas in se mutuo exerunt, non obstat, quo minus eædem potentiæ motum quemdam habeant communem aliunde impressum, uti fit, siquis libram, cuius pondera in æquilibrio sunt, alio transferat.

Vulgo æquilibrium in corporibus gravibus *spectatur, sed reipsa id ad omnes potentias pertinet, sive ad ea omnia,*

quæ

quae facultate pollent, vim ac motum corporibus imprimendi.

§. CXVIII.

Postulata. I. Si quaeritur, quomodo potentiae vecti adplicatae agant, id est, *quantas vires*, & qua *directione* exerant tum adversus se mutuo, tum contra potentiam quamdam tertiam, seu resistentiam, aut punctum fixum, circa quod in se agunt; quivis vectis concipi potest instar lineae geometricae, inflexilis, & gravitatis expertis, quia crassities, flexibilitas, pondus vectis nil conferunt, ut intelligatur, quomodo, & quantum potentiae agant, quatenus vecti adplicatae sunt: siquam eae res mutationem in usu vectis inducunt, ea ex aliis principiis explicanda est.

II. Cuivis vecti instar potentiae adplicari possunt pondera gravia, vires hominum, bestiarum, aquae praeterfluentis, venti, obex quicunque etiam immobilis; verbo, quidquid vim exerit, qua ope vectis motus alterius corporis producatur, vel extinguatur.

III. Vis cuiuscunque potentiae in quovis directionis, quam habet, puncto eadem est; hinc quantumcunque in eadem recta producatur directio potentiae, vis eadem manet. Certe pondus grave, sive ex longiore filo sive breviore pendeat, pari vi tendit, & obstaculum urget deorsum teste experientia certa.

IV. In theoria quaevis potentia quacunque directione agens, per pondera exhiberi potest; in quavis enim directione etiam obliqua, secundum quam agit potentia, concipi potest fixa trochlea, & circumductus funis, cui adpensum pondus agat secundum datam directionem, & data vi. Eiusmodi vero pondera instar *punctorum* gravitantium spectari possunt, quia sola dimensio corporis in longum, latum & profundum ad maiorem minoremve gravitatis vim nil confert, sed idem haberetur effectus, si tota corporum gravium vis in unico puncto velut centro eorundem esset collecta.

V. Directiones ponderum ex filo flexili pendentium, & adplicatorum ad vectem pro parallelis haberi pos-

possunt; etsi enim directiones gravitatis versus telluris centrum convergant; tamen convergere, & inclinari ad se minime percipiuntur, nec censentur omnino, quia non nisi post ingentem distantiam sub angulo plane minimo concurrunt.

VI. Vires potentiarum quarumcunque, seu ponderum, quæ potentiis substituuntur, etiam lineis possunt exprimi, in quibus ratio magnitudinum exprimit rationem intensitatis potentiarum: positio directionem earundem; & quoniam vis, & intensitas potentiarum in quovis directionis, quam habent, puncto eadem est, (post III.) idcirco eæ vires in linea quantumcunque producta sumi possunt. Sint (F. I. T. II.) potentiæ P, & p. Assumta recta arbitrariæ longitudinis e. g. P M, quæ exhibeat potentiam P, fiat : P, p = P M : p N; si igitur potentia p est dupla, tripla, vel quomodocunque multipla, aut submultipla potentiæ P; etiam recta p N erit dupla, tripla, vel quomodocunque multipla, aut submultipla rectæ P M pro arbitrio assumtæ, poteritque potentia P exhiberi recta P M, vel recta æquali O R in eadem directione P M producta; & potentia p exhiberi recta p N, vel æquali O S. Imo, quia duntaxat inclinatio diversa directionum vim, & effectum eiusdem potentiæ immutat; idcirco loco unius rectæ, quæ vim, & directionem datæ potentiæ exprimit, sumi potest quævis alia priori parallela, cuius magnitudo ad alias vires eandem retinet rationem; atque ita salvus manebit valor virium, quia binæ parallelæ ad quamvis tertiam directionem alterius potentiæ eodem modo inclinantur. Illud præterea animadvertendum: si vires potentiarum exprimuntur lineis, ordo literarum, queis lineæ denominantur, designant plagam, in quam vires in eadem iacentes recta tendunt; ut si dicam: vis O T; indicio est, eam vim ex O versus plagam, in qua est punctum T, tendere: contra expressio T O, indigitat plagam oppositam ex T versus O.

VII. Quando potentiæ quotcunque sub angulo quodam adplicantur ad vectem instar lineæ spectatum, tres numero potentiæ, & tria vectis puncta, ubi adplicatæ sunt, spectari necesse est. Ad hunc enim numerum poten-

tentiæ quotcunque reducuntur, uti proximo capite demonstrabimus. Earum potentiarum una vulgo dicitur *pondus*, *onus*, *obstaculum*, aliquando in machinis etiam *resistentia*; estque id, quod ope vectis sustinendum, vel ad motum ciendum est: altera adpellatur *vis agens*, aut nomen *potentiæ* retinet. Tertia concipitur in puncto vectis, quod alteri puncto fixo, *fulcro* vel *hypomochlio* dicto, incumbit; & quia motus ponderis, ac potentiæ, vel nisus ad motum circa id fulcrum exeritur, id *centrum motus* nuncupatur. Expedit, ut hoc ipsum fulcrum, sive eius resistentia instar potentiæ spectetur, ut intelligatur, quanta vi a pondere, & potentia adficiatur, quantaque firmitate præditum esse debeat, ne iisdem succumbat, & qua directione sit opponenda eius resistentia; idcirco id fulcrum fere instar potentiæ tertiæ, aut resistentiæ habebimus. Spectata quidem theoria æquilibrii perinde est, utramvis e tribus potentiis pro tertia, seu pro resistentia habeas; ut tamen verbis, ac signis secernantur ea, quæ in usu vectis & machinarum passim distingui solent, potentiam tertiam, quæ binis aliis resistit, dicemus π, onus movendum P, potentiam moventem p. Si potentia tertia π est media inter binas extremas, distantia ponderis P ab eadem erit D, & distantia potentiæ p ab eadem media erit d.

§. CXIX.

Propositio I. *Quotiescunque vis potentiæ tertiæ π æqualis est vi compositæ ex binis aliis potentiis P, & p vectem urgentibus directione potentiæ tertiæ opposita, habetur æquilibrium.* Sint (F. I. T. II.) vecti AB adplicatæ potentiæ P, & p, earumque magnitudines, & directiones exprimant rectæ PM, pN, quæ producantur ultra punctum concursus O, sumtis OR = PM, & OS = pN; compositis viribus diagonalis OT exhibet vim compositam, seu potentiam æquipollentem binis datis potentiis P, & p. Hæc diagonalis producatur, donec vecti occurrat in C, fiatque CL = OT. Si iam concipiatur potentia tertia π expressa per LC, & æqua-

lis

lis vi compositæ $OT = CL$, perspicuum est, quod habeatur æquilibrium, cum vires compositæ potentiarum P & p vectem urgentium directione C L & vis potentiæ tertiæ π in eadem recta & oppositæ, & æquales sint.

Recta O T translata in C L non tantum multitudinem vis compositæ, ac proinde etiam magnitudinem potentiæ tertiæ π, sed etiam punctum vectis C determinat, in quo vis C L æquipollet binis potentiis P, & p, & in quo tertia potentia π adplicanda est, ut habeat æquilibrium, quia vires in eadem recta opposita esse debent, ut perspicue intelligatur, eas se mutuo extinguere.

§. CXX.

Propositio II. inversa prioris. *Quotiescunque in vecte habetur æquilibrium, semper vis potentiæ cuiusdam tertiæ π æqualis est vi compositæ ex binis aliis potentiis P & p vectem urgentibus directione potentiæ tertiæ opposita.* Dem. 1. Nullum æquilibrium sine virium oppositione, nulla virium oppositio sine directionum oppositione distincte intelligi potest; quotiescunque igitur sint datæ potentiæ quædam cuiuscunque directionis, si æquilibrium inter se servant, necesse est, ut hinc ex potentiis agentibus vis una omnibus æquipollens, & inde ex resistentiis, si plures adsint, itidem una vis directe opposita priori, & æqualis constituatur. 2. Tria vulgo ab omnibus puncta in vecte spectantur, bina extrema, ubi adplicantur pondera, seu potentiæ quæcunque P & p & fulcrum seu hypomochlium C; dico; neglecto hypomochlio C quæri seorsum non potest, cur pondus P non moveat pondus p, & vicissim; quia ratio sufficiens cuiuscunque effectus non intelligitur, nisi omnes potentiæ, quæ ad eum concurrunt, & omnes potentiarum vires, quas exerunt in effectum ac virium directiones simul in considerationem veniant. Atqui ad æquilibrium non modo bina pondera P, & p, sed vis quoque opposita, seu resistentia fulcri concurrit, præsertim cum remoto fulcro, si alia in C adplicetur,

po-

potentia, aliudve pondus agens directe L C, & vi composita ponderum seu potentiarum P, & p æquali, æque obtineatur æquilibrium, ac per fulcrum immobile in C positum; & quoniam hæ potentiæ omnes in vecte adversus se mutuo agunt, necesse est, earum vires, ac directiones in communi quodam puncto concurrere; secus profecto non intelligitur, quomodo adversus se mutuo agant. Quam ob rem actiones potentiarum P & p per latera, actio seu resistentia potentiæ tertiæ π per diagonalem parallelogrammi, sed contraria directione sumtam repræsentandæ sunt.

Propositio a nobis demonstrata tum directa, tum inversa omnino generalis est, & ad omne directionum, quas habent potentiæ agentes, vectiumque, quibus adplicantur, genus pertinet, uti infra ostendemus. Nunc leges fundamentales, quæ in æquilibrio corporum solidorum obtinent, ex ea deducendæ sunt.

§. CXXI.

Lex I. *Si ex quovis puncto accepto in directione unius e tribus potentiis π, P & p in æquilibrio constitutis demittantur ad directiones binarum reliquarum perpendicula, erunt binæ reliquæ inter se reciproce ut perpendicula ex directione tertiæ potentiæ demissa*, sive, quia perpendicula metiuntur distantias potentiarum, *binæ quævis potentiæ semper sunt in ratione reciproca distantiarum a tertia quando inter omnes habetur æquilibrium.* Potentiæ enim π, P, & p sunt ut rectæ O T, O R, O S vel R T, hoc est, ut latera trianguli O T R; quare cum in quovis triangulo latera sint ut sinus angulorum oppositorum, si sinus angulorum dicantur *s.* erit π sive O T = *s.* O R T = *s.* S O P = *s.* P O p, nempe ut sinus complementi ad duos rectos. Potentia P sive O R = *s.* O T R = *s.* T O S = *s.* C O p. Potentia p sive R T = *s.* T O R = *s.* C O P. Est igitur potentia π in medio constituta, ut sinus anguli P O p, quem directiones potentiarum extremarum formant; potentiæ vero P, & p reciproce ut sinus angulorum, quem

quem directio cuiusvis potentiæ cum directione mediæ efficit. Porro demittantur ex C puncto directionis potentiæ mediæ π in directiones reliquarum perpendicula C m ; C n, erunt hæc perpendicula, sumta C O pro sinu toto, ut sinus angulorum C O P, C O p; quoniam igitur potentiæ P, & p sunt reciproce ut sinus eorundem angulorum, eædem erunt reciproce ut perpendicula ex puncto directionis potentiæ π in earum directiones demissa.

Si ex puncto quodam n directionis potentiæ p demitteretur perpendiculum in rectas T C, & P R directiones reliquarum, ea perpendicula iterum essent reciproce, ut reliquæ potentiæ π & P; & si ex puncto quodam m directionis potentiæ P demitterentur perpendicula in T C, & p S directiones reliquarum, pariter invenirentur ea perpendicula reciproce ut reliquæ potentiæ π & p; ut adeo quævis ex tribus potentiis π, P, & p pro tertia sumi queat.

§. CXXII.

Lex II. *Quotiescunque in vecte habetur æquilibrium, celeritates elementares potentiarum, ac spatia minimo tempusculo confecta sunt directe ut perpendicula ex directione tertiæ potentiæ in directiones earundem demissa; sive* quia perpendicula metiuntur distantias, *celeritates elementares potentiarum, ac spatia minimo tempusculo confecta, sunt directe ut distantiæ earundem a potentia tertia*, & quia perpendicula seu distantiæ, ac potentiæ reciprocant, erunt *celeritates elementares ac spatia minimo tempusculo confecta reciproce ut potentiæ, consequenter momenta earundem, quæ sunt ut factum ex potentia in celeritatem, æqualia.* Concipiantur in A & B (F. II. T. II.) potentiæ P & p agentes directione B M, & A N, sintque earum a tertia potentia distantiæ, perpendicula C m, C n; concipiantur facta impressione minima circa tertiam potentiam C velut centrum moveri, ut obtineant situm b M, a N; erit in primis ob arcus A a, B b simi-

miles, A a : C A = B b : B C, ac proinde $\frac{Aa}{CA} = \frac{Bb}{BC}$. Demittantur ex a, & b in priorem directionem perpendiculares a d, b e, ut ſpatium a potentiis minimo tempuſculo confectum, & celeritas elementaris exprimatur per A d, & B e; Porro triangula C A n, A d a ſimilia ſunt ob angulos ad d & n rectos, & angulos C A n, A a d æquales; pariter triangula C B m, B e b ſimilia; igitur erit

$$1.\ Aa : Ad = CA : Cn;\ \&\ Ad = \frac{Aa.Cn}{CA}.$$

$$2.\ Bb : Be = BC : Cm;\ \&\ Be = \frac{Bb.Cm}{BC}.$$

Unde fit $Ad : Be = \frac{Aa.Cn}{CA} : \frac{Bb.Cm}{BC} = Cn : Cm$ ob $\frac{Aa}{CA} = \frac{Bb}{BC}$. Igitur A d, & B e, quæ ſpatium tempuſculo minimo confectum, & celeritates elementares exprimunt, ſunt directe, ut perpendicula, ceu diſtantiæ a tertia potentia c velut centro motus. Sit celeritas elementaris, ſpatium confectum, diſtantia in potentia P = C, S, D, & in potentia p = c, s, d; erit $C : c = S : s = D : d$

Eſt autem ex prima lege $P : p = d : D$ igitur erit

$P : p = c : C = s : S$; ac $PC = pc$ & $PD = pd$

Unde patet, ***momenta potentiarum æquilibrantium eſſe æqualia***, & factum ex quavis potentia in ſuam diſtantiam a centro motus æquale facto ex altera potentia in ſuam itidem a centro motus diſtantiam.

Simpliciſſima huius legis demonſtratio habetur in caſu, quo directiones potentiarum ad vectem normales ſunt; tunc enim

enim spatium, & celeritas elementaris erit ut arcus descriptus; arcus descriptus, uti distantia seu perpendiculum; ut sit

$$S : s \, (= C : c :) \; D : d;$$

Cumque sit $P : p = d : D$, *erit* $P : p = c : C = s : S$; & $PC = pc$; $PS = ps$, *uti* $PD = pd$. *Demonstratæ igitur sunt binæ leges generales statices & mechanices. I. Si potentiæ in æquilibrio sunt, earum a centro motus distantiæ cum ipsis potentiis reciprocant: II. Si eædem potentiæ in æquilibrio sunt, momenta earundem, sive facta ex potentiis in celeritates sunt æqualia. Harum propositionum inversæ æque sunt veræ, ac directæ, hoc est I. Si potentiæ, ac distantiæ earundem a centro motus reciprocant, eædem in æquilibrio erunt. II. Si momenta binarum potentiarum sunt æqualia, id est, si potentiæ reciproce sunt ut celeritates, vel spatia eodem tempore confecta, pariter erunt in æquilibrio. Nam ratio reciproca distantiarum, & æqualitas momentorum indicio sunt, potentiam tertiam in eo puncto esse adplicatam, in quo ea vi compositæ ex binis potentiis directe opponitur; ac proinde si satis virium habet potentia tertia, sive si fulcrum, ut pono, sat firmum est, æquilibrium dabitur.*

Enimvero ut in Schol. §. CXIX. adnotavi, unicum est punctum C, *in quo vis* CL *æquipollet vi compositæ potentiarm* P, & p, *ac proin vis contraria* LC *earundem vim totam sustinet; ab hoc autem puncto desumtæ distantiæ cum potentiis reciprocant, si in æquilibrio sunt: igitur vicissim erunt in æquilibrio, si ea distantiarum & potentiarum reciproca ratio in casu quodam ponitur. Hinc deduces* 1. *Datis pondere* $P = 40$; *eius distantia* D *a fulcro* $= 2$; *data item potentia* $p = 8$, *eiusque a fulcro distantia* $d = 10$; *determinabitur, an æquilibrium habeatur, vel utrum pondus, an potentia prævaleat. Sit enim* $PD = pd$; *habebitur æquilibrium ut in hoc casu* $PD = pd$ *seu* $40 . 2 = 8 . 10$; *secus prævalebit illa potentia, vel pondus, quod in suam a fulcro distantiam ductum, factum maius efficit, quam sit factum ex altera potentia vel pondere in suam a fulcro distantiam.* 2. *Datis binis potentiis, vel ponderibus, & distantia unius invenitur distantia alterius; ut si sit* $P = 600$. $p = 200$. $D = 1$.

erit

erit $d = \frac{P\,D}{p} = 3$. *Pariter datis distantiis potentiarum, vel ponderum, & data potentia vel pondere uno invenitur potentia vel pondus alterum. Sit* $P = 10$. $D = 3$. $d = 6$. *erit* $p = \frac{P\,D}{d} = \frac{10 \cdot 3}{6} = 5$. *Plura hisce similia infra deducemus. Nunc adplicatio harum legum ad varios vectes, variasque potentiarum directiones instituenda est.*

§. CXXIII.

Directiones Potentiarum.

I. *Si potentiæ agentes P, & p sunt parallelæ, ac in easdem partes tendunt, erit tertia potentia π æqualis summæ earundem, eiusque directio itidem parallela directionibus reliquarum.* Nam (F. I. T. II.) quia directiones parallelæ non nisi in distantia infinita concurrunt, evanescit angulus P O p, hoc est anguli R O T, & T O S sive O T R, & angulus O R T cuius sinus exprimit tertiam potentiam, infinite parum differt a duobus rectis, adeoque rectæ O R, & R T simul sumtæ æquales erunt rectæ O T, sive potentia π æqualis summæ potentiarum P & p, quæ exhibentur per rectas O T, & R T. Et quoniam ob mutuam potentiarum actionem omnes in eodem puncto concurrere debent, etiam directio tertiæ potentiæ π non nisi in distantia infinita cum iisdem concurret, hoc est, parallela iisdem erit.

Qui primis quantitatum infinitarum elementis imbutus haud est; haud ægre tamen, quæ de concursu parallelarum in distantia infinita, & æqualitate rectarum O R, & R T cum recta O T dicta sunt, intelliget, modo concipiat, eo propius summam earum rectarum ad rectam O T accedere, quo maior in triangulo O T R fit angulus ad R, & minores anguli ad O, & T manente semper tota vi demonstrationis supra datæ §. CXIX. hinc, cum summa earum rectarum semper propius ad æqualitatem cum recta O T accedere possit, donec in limite directiones potentiarum fiant paral-

lelæ, denique summa earundem rectæ O T æqualis erit, & parallelæ non nisi in distantia infinita concurrent, hoc est, angulus P O p denique evanescet.

II. *Si potentiæ agentes P, & p sint parallelæ, sed in contrarias partes tendant, pontentia tertia π erit æqualis differentiæ earundem, & itidem parallela.* Sit F. III. T. II. directio potentiæ P, PM sive OR, & potentiæ p directio Np, vel OS; completo parallelogrammo ORTS, erit potentia tertia π eiusque directio T O, fiant directiones P M, N p parallelæ, ut evanescat angulus π O p, hoc est, anguli R O T, T O S sive O R T, ut angulus O T R infinite parum differat a duobus rectis, & latus ei oppositum O R fiat = R T + O T; unde fiet O T, quæ potentiam tertiam π exprimit, = O R — R T, quæ est differentia potentiarum P, & p; quod directio potentiæ π sit reliquis parallela, eadem, ac supra, ratio demonstrat.

Quia quævis ex tribus potentiis pro tertia sumi potest, inposterum, ne qua confusio oriatur, potentiam mediam, seu inter binas extremas constitutam semper exprimemus litera π, binas extremas per P, & p. Illud ex dictis modo patet, binas extremas uti P & p Fig. I. vel π & p F. III. semper in eandem partem tendere, mediam in partem contrariam, quotiescunque eæ æquilibrium tuentur.

Duplici casu potentiæ parallelæ esse possunt 1. Si earum directiones sub æquali angulo ad vectem inclinantur, *ut F. IV. T. II. potentiæ P M, & p N; quo casu ut distantiæ a tertia potentia π inveniantur, directiones producendæ sunt in m, & n, erit P: p = C n: C m; & π = P + p. Vectis urgebitur vi duplici, deorsum vi P Q + p q, & directione P p vi = P S + p s; contra vis potentiæ tertiæ resolvetur in binas directiones, & vires æquales.* 2. Si potentiæ ad vectem adplicantur sub angulo recto; *atque hic casus maxime spectari solet; vectis enim plerumque ponitur situ horizontali, & directiones ponderum ad horizontem normales sunt, ut F. V. ubi perpendicula, & distantiæ ponderum P, & p sunt ipsa vectis brachia C P, & C p. Arcus P m, p n, sive spatia tempu-*

sculis

sculis minimis descripta, ac celeritates elementares, ut radii sive brachia vectis CP, & CP; potentia tertia π adplicata in puncto C, a quo desumtæ distantiæ cum ponderibus P, & p reciprocant, pariter normalis ad vectem, & summæ eorum ponderum æqualis; nam si remoto fulcro in C ope trochleæ adplicetur pondus π æquale P+p, teste experientia obtinetur æquilibrium. Cæterum quemcunque situm habeat vectis, aut formam quamcunque, si pondera ex filo fexili pendeant, eorum directiones semper pro parallelis habendæ sunt (§. CXVIII. *Post. V.*)

§. CXXIV.

Vectis Triplicis Generis.

Mechanici vectem triplicis generis statuunt pro vario situ potentiæ tertiæ, seu puncti fixi, aut basis, fulcri, hypomochlii, centri motus; hæc enim omnia idem denotant. *Vectis primi generis est*, si punctum fixum π inter pondus movendum P, & potentiam p medium constituitur. *Vectis secundi generis*, si pondus movendum P est inter fulcrum, & potentiam. *Vectis tertii generis*, si potentia movens ponitur inter fulcrum, & onus movendum. Vectis primi generis cognominatur *heterodromus*, quia pondus, & potentia eidem adplicatæ, si moventur, in diversas partes abeunt: Vectis secundi & tertii generis est *homodromus*; facto enim motu pondus & potentia in eandem abeunt partem; ut igitur intelligatur, ad quod genus pertineat datus vectis, directio ponderis, & potentiæ motæ spectanda est. De hoc triplici genere singulatim quædam adnotanda sunt.

I. In vecte primi generis, in quo fulcrum in puncto quodam intermedio fixum est, æquilibrium habebitur *primo*, si & pondera vel potentiæ adplicatæ, & distantiæ utrinque æquales sunt: *secundo* si, quo maius est unum pondus præ altero, tantundem eiusdem distantia a fulcro minor sit. Primus casus ad libram, vel bilancem, alter ad Stateram Romanam pertinet, de quibus infra differemus: utroque casu erit $P:p=d:D$. Ad vectem primi generis pertinent trabes fulcris utrinque ceu muris impositæ, ac superius gravatæ ponderibus. Nam perinde

inde est, sive potentiæ, aut pondera P, & p deorsum, & tertia potentia π sursum agat, sive hæc agat deorsum imposito, vel suspenso pondere, & illæ sursum uti si (F. VI. T. II.) loco potentiarum P & p substernuntur fulcra; ac tum quodvis earum tanta vi resistet, quanta vi ageret potentia adplicata ad conservandum æquilibrium. Est autem p : π = A C : AB; unde erit p sive resistentia, aut vis fulcri, $= \frac{\pi . AC}{AB}$. & P: π = CB:AB;

& $P = \frac{\pi . CB}{AB}$.

Ex his confici potest ratio, quanta firmitate spectatis oneribus impositis, & longitudine trabium fulcra pollere debeant; Pondus intermedium in utrumque sustentaculum dividitur in ratione reciproca distantiarum, quas ab eodem sustentacula, vel fulcra habent. Sit pondus a binis fulcris sustentandum, vel humeris imponendum æquale 120 tt; si ponas, unum fulcrum non nisi 20 tt ferendis par esse; cogetur alterum fulcrum reliquam partem ponderis sustentare, nempe 100 tt; erit igitur ratio, qua vires distribuuntur ut 20: 100 seu 1: 5. in eadem igitur ratione distantia ponderis ab utroque fulcro determinanda est, ut nimirum pondus ab eo fulcro, quod unam totius partem sustinet, distet quinque partibus; ab altero distet una parte. Quocirca data trabs, vel pertica in 6 partes æquales dividi debet. Hoc modo vel infans par erit, ut cum Hercule gestet pondus ex pertica suspensum. Ut autem in hoc casu gestationis, experientia & usus respondeat theoriæ, necesse est, ut pertica, ex qua pondera gravia suspenduntur, sit horizonti parallela; facta enim inclinatione pondus intermedium aliter distribuitur, sive potius eius distantia ab eo fulcro minuitur, quod depressius est, & augetur a fulcro altiore; si vectis A B obtineat situm A q, distantia ponderis a fulcro p, quæ ante erat = CB, fiet e B; & in situ vectis A r, erit distantia ab eo fulcro = d B, quia directio gravitatis est verticalis ad horizontem, & distan-

diſtantias metitur perpendiculum in ponderis directionem demiſſum. Præterea in caſu geſtationis etiam ponderis ipſius vectis vel perticæ habenda eſt ratio; quo quidem neglecto, & præciſo perinde erit, an ea pertica longior vel brevior fuerit, ſi ratio diſtantiarum, & ſitus, quem indicavimus, ſervetur. Ad vectem primi generis revocantur forſices, forcipes, inſtrumenta nucifraga, emunctoria elychniorum, in quibus claviculus medius eſt inſtar fulcri, bina brachia ceu bini vectes heterodromi: pondus eſt materia ſcindenda aut frangenda: potentia adplicatur manubrio; quare ut vis potentiæ creſcat, fabri, aliique opifices manubria longiora adhibent, & materiam ſcindendam, ſi paulo vehementius reſiſtit, propius ad clavum admovent: quamquam in his quidem inſtrumentis, quorum latus in aciem deſinit, ceu in forſice, ratio quoque cunei, ſeu potius plani inclinati ſpectanda eſt, uti infra exponemus.

II. In vecte homodromo, ſive ſecundi & tertii generis fulcrum in puncto extremo ponitur, ut (F. VII. T. II.) in c fulcrum, in O pondus vel onus movendum, in V vis agens ſeu potentia ſit, quando eſt vectis ſecundi generis, aut ſi eſt tertii generis (F. VIII. T. II.) in c denuo fulcrum, in Q onus, in P potentia. utroque caſu pondera ſeu potentiæ, ac diſtantiæ a fulcro C deſumtæ reciprocant, ut ſit $O : V = VC : OC$, & $Q : P = PC : QC$. Celeritates elementares, ſive arcus minimo tempuſculo deſcripti a potentiis normaliter adplicatis erunt ut diſtantiæ, vel radii CV, CO, vel CQ, CP. Ad vectem ſecundi generis refertur remus, in quo fulcrum eſt aqua, remigis manus in altero extremo adplicata eſt potentia, ſeu vis agens, onus vero ipſa navis: item malus navis, cuius fulcrum in navis fundo hæret, pondus circa pavimentum ſuperius, potentia in ſuperiore mali parte eſt ventus vela implens, & onus propellens: culter inciſorius: dentes molares, quorum ope fortius mordemus (cum interiores, ac fulcro propiores ſint) quam dentibus, *inciſoriis* dictis. Ad vectem tertii generis pertinent eæ partes machinarum, quæ pede inſiſtente premuntur, ut agitetur rota quædam, ut fit circa cotes, folles. Quævis ianua vel ciſta fulcrum in cardinibus habet, reſiſtentiam vero in altero extremo, &

 in

in puncto intermedio manubrium, cui potentia admovetur; hinc si duo homines connitantur, alter, ut aperiat, alter, ut claudat ianuam; fortius aget, qui a cardine ceu fulcro distat longius. Ex hoc genere potentia seu vis agens nullum commodum habet virium, sed lucrum temporis, ut pondus e. g. rota tanto moveatur celerius, quo magis a fulcro distat. Eodem genere usi sunt Veteres ad lapides maxima cum celeritate eiiciendos in hostium turmas: eodem utimur in forcipibus destinatis ad prehendendos carbones; aliisque in rebus, in quibus parva est restistentia superanda, & vires abunde suppetunt, aut si necessitas ad eiusmodi vectis usum adigat, uti cum saepe scala uno extremo fixa in C (F. IX. T. II.) adhibita circa P manu erigitur; ac tum, quo altius ea erigitur, eo minus a potentia onus sentitur; ponatur enim pondus scalae superandum aequipollere ponderi adpenso Q; perspicuum est, tantundem imminui eius a fulcro c distantiam, quo maior est altitudo, ad quam elevatur. Hac eadem vectis specie uti naturam animalium in adhibendis musculis ad movendos artus ostendunt Anatomici.

§. CXXV.

Vectis Rectangularis.

Si vectis brachia curvilinea, aut in angulos inflexa sint, vectes *incurvi*, *inflexi*, & *angulares* vocantur, quorum variae species pro angulorum varietate censentur. In his punctum fixum seu hypomochlium plerumque sub vertice anguli, nempe in concursu binarum linearum ponitur.

I. *Si in vecte rectangulari* (F. X. T. II.) *punctum fixum, seu potentia tertia* π *constituitur in angulo recto, & potentiae seu pondera P, & p agant directione ad vectis brachia normali, erit vis potentiae* π *seu resistentia puncti fixi, eiusque directio ut hypothenusa* π *C, & potentiae aequilibrantes reciproce ut catheti, seu brachia vectis rectangularis.* Concipiatur enim potentia P, quae est ut A π, translata in C B, & potentia p, quae est ut B π translata

lata in CA ; erit vis potentiarum P , & p composita = C π, ac proin vis & directio potentiæ tertiæ π seu resistentia puncti fixi = π C. Colliges : 1. in fulcro π tam parum excipitur vis æqualis summæ ponderum, vel potentiarum P, & p (uti nonnulli putant) quam parum diagonalis æquatur summæ laterum. 2. Si brachio verticali A π non modo in supremo puncto A, sed in aliis quoque punctis, uti in m esset adplicatum quoddam pondus una cum pondere in A adplicato obsistens potentiæ P, perspicuum est, potentiam p eo casu minorem fieri, quam si sola obniteretur potentiæ P. 3. Si loco potentiæ p adplicetur in A obex immobilis, vis in obicem, eiusque resistentia foret æqualis potentiæ p æquilibrium tuenti cum altera P. 4. Si obicem quendam ponas non tantum in A, sed etiam in punctis intermediis, ceu in m ; actio potentiæ P in obicem superiorem A multo minor evadet, quam si unus in A obex ponatur. Hæ deductiones tam perspicuæ sunt, ut commemorari non debuissent, nisi earundem usum facere alio loco cogitaremus.

II. *Sint* (F. XI. T. II.) *bini vectes rectangulares A Ca, B Cb communi axe in C ita connexi, ut brachia verticalia Ca, Cb, quæ eiusdem sint longitudinis circa a & b libere separari, & a se divergere queant. Brachiis horizontalibus A C, B C appendantur pondera M, & N, quæ sint reciproce, ut longitudo eorundem brachiorum, sive reciproce ut distantiæ eorundem ponderum.* His positis manifestum est : 1. Si brachia verticalia circa a, & b nullo nexu, aut vinculo cohiberentur, pondera M, & N circa C rotata describerent arcus A a B β. 2. Si eadem brachia constringuntur quodam vinculo o, pondera M & N non nisi mediante hoc vinculo in se mutuo agunt ; dum enim pondus M deorsum nititur, utrumque brachium verticale trahitur directione o q, simul pondus N in B directione tangentis B s sursum urgetur ; & vicissim dum pondus N deorsum nititur, utrumque brachium verticale trahitur directione o p : & pondus M urgetur sursum directione tangentis A t. Igitur hæc pondera M & N non nisi mediante vinculo o in se mu-

tuo agunt. 3. Si manente vinculo alterutrum pondus e. g. N prævaleret, eiusque ad pondus M ratio maior poneretur, quam sit ratio reciproca distantiarum A C, B C, illud descenderet per arcum B ꝫ, brachia C b, C a situ verticali exciderent, & pondus M cum suo brachio attolleretur in U. Manente igitur vinculo æquilibrium in vecte uno rectangulari BCb turbari non potest; quin turbetur etiam in altero a C A. 4. Quæri potest, quanta vi pondera M & N, si in æquilibrio sint, agant tum in vinculum o, tum mediante eo vinculo in se mutuo. Ut quæstio resolvatur, concipiatur remoto vinculo in brachio verticali C a ope funiculi & trochleæ in G, adplicari pondus m, quod in æquilibrio sit cum pondere M; & in brachio verticali C b adplicari eodem modo pondus n, quod in æquilibrio sit cum pondere N. Cum eadem maneant pondera M & N, eædemque illorum distantiæ, tantundem nunc agent in pondera opposita m, & n, ob quæ brachia verticalia manent coniuncta, quantum antea agebant in vinculum o, eoque mediante in se mutuo; & si pondera m, & n æqualia inveniuntur posito æquilibrio, etiam vis ponderum M & N in vinculum o, eoque madiante, in se mutuo, æqualis est, atqui hoc ipsum facili calculo reperitur. Nam *primo* ex hyp. est $M : N = BC : AC$; & $M \times AC = N \times BC$. Dein ex præc. numero patet, ut pondera M & m sint in æquilibrio, opus esse, ut sit $M : m = aC : AC$; eritque $m = \frac{M \times AC}{aC}$. pariter ob eandem rationem est $N : n = bC : BC$; ac $n = \frac{N \times BC}{bC}$. unde facile colligitur, pondera m, & n, ac vim ponderum M & N in vinculum o esse æqualia; nam $M \times AC = N \times BC$ & $aC = bC$.

§. CXXVI.

Vectis Obtusangularis.

Sit (F. XII. T. II.) vectis obtusangularis A C B; fulcrum in C; pondera P & p agant directionibus gravitatis

tatis & parallelis A a, B b; dico: si pondus P adplicatum in B in æquilibrio sustinet pondus p adplicatum in A; idem pondus P adplicatum in D æquilibrium cum eodem pondere p efficiet. Manifestum est, pondus P adplicatum in B non niti per vim normalem B f vel G e alteri ponderi p obniti, & æquilibrium tueri; hæc vis normalis æquilibrium efficiens cum pondere p, erit $= \frac{p.AC}{CB}$.

Porro vis normalis ad vim absolutam ponderis P est, ut B f, vel Ge: Be, vel ob similitudinem triangulorum B e G, B C D, ut C D: B C. Sit vis absoluta P; erit

$$\frac{p.AC}{BC} : P = CD : BC;\ \&\ P = \frac{p.AC}{CD}.$$

Porro pondus in D normaliter adplicatum, quod cum pondere p efficeret æquilibrium, pariter esset $= \frac{p.AC}{CD}$; igitur idem pondus sive adplicetur in B, sive in D æquilibrium constitueret; ex quo patet, potentias æquilibrantes P & p semper esse reciproce ut perpendicula C A, C D in eorum directiones A a, B b vel D b demissa. Resistentia in fulcro C æqualis est summæ ponderum P. & p; transferatur enim vis B G in m C, & vis G e in n C (cum directiones parallelæ vires non immutent) erit vis composita in C = C O = B e, nempe ut vis absoluta ponderis P; cumque etiam a pondere p vis in C sit æqualis gravitati absolutæ; erit resistentia in fulcro C æqualis summæ ponderum P, & p.

§. CXXVII.

I. Vectis acutangularis A C B (F.XIII. T.II.) ad homodromos pertinet; si enim motus sequeretur, pondus P adplicatum in B, & potentia p adplicata in A eandem haberent directionem. Hinc si directiones parallelæ sunt, erit P : p = A C : m C; concipi enim potest pondus P in m adplicatum.

II. Ex binis vectibus homodromis componitur vectis

ctis acutangularis A C B (F.XIV. T.II.) cuius fulcrum in C, onus vel resistentia superanda per vinculum m n naturale, vel artificiale exprimitur, potentia in A & B, vel concipi potest in uno extremo A, vel B obex immobilis. Si potentia normaliter adplicatur ad vectem A C, erit ea ad resistentiam ut m C : A C. Hæc vectis acutangularis consideratio ad fissionem corporum solidorum ceu lignorum, & vim potentiæ per cuneum agentis adplicari potest.

§. CXXVIII.

Vectis Incurvus.

Sit (F.XV. T.II.) vectis incurvus A C B; potentiæ divergentes A q, B P; quæ producantur: donec concurrant in T; fiat T S = A Q; T R = B P; completo parallelogrammo diagonalis T O repræsentat vim compositam potentiarum A Q, B P; si iam tertia quædam potentia = O T, vel K C sit æqualis & opposita vi T O, vel si fulcrum, quod ferre possit vim T O, adplicetur in C directione K C, habebitur æquilibrium. Ex C in directiones potentiarum agantur perpendicula C m, C n, fiatque in triangulis C T m, C T n recta C T sinus totus = 1. sit *f.* Sinus; erit

1. A Q = T S = R O = *f.* O T R
2. B P = T R = S O = *f.* O T S
3. C T : 1 = C m : *f.* O T S = B P
4. C T : 1 = C n : *f.* O T R = A Q.

Unde fit A Q : B P = C n : C m; hoc est, si æquilibrium habetur, potentiæ, & distantiæ earundem a centro motus reciprocant. Patet, quam generalis sit propositionis supra demonstratæ adplicatio.

CAPUT

CAPUT II.

De Centro Æquilibrii, ac Gravitatis.

Uti æquilibrium non ad ſolas gravitatis vires, ſed ad potentias quascunque pertinet: ita theoria centri æquilibrii multo latior eſt, quam ut ad ſola corpora gravia reſtringi poſſit, etſi ab his exempla & adplicatio theoriæ maxime peti ſoleant. Eſt autem hæc de centro æquilibrii, & gravitatis tractatio tum ad machinarum vim & uſum, tum ad innumerabilia naturæ, & artis opera explicanda omnino neceſſaria.

§. CXXIX.

Definitio. Collectio plurium punctorum, vel corporum, quæ ſimul in conſiderationem veniunt, & per vires mutuas, vel lineas inflexiles connexa ſunt, adpellatur *ſyſtema punctorum, vel corporum. Centrum æquilibrii* eſt punctum illud in ſyſtemate punctorum, vel corporum, cui potentia tertia, vel reſiſtentia adplicanda eſt, ut ſyſtema totum in æquilibrio ſit; ac ſi vires punctorum, vel corporum a gravitate proveniunt, id punctum vocatur *centrum gravitatis.* Unde perſpicuum eſt, latius patere æquilibrii, quam gravitatis centrum.

Sint (*F. XVI. T. II.*) *in vecte A B quotcunque potentiæ, vel pondera adplicata P & p, Q & q, ita ut ſummæ factorum ex quovis pondere in ſuam ab hypomochlio C diſtantiam ex utraque iſtius parte æquales ſint, nempe* $P. PC + Q. QC = p. pC + q. qC$. *Habebitur, ſyſtema corporum; nam pondera connectuntur recta inflexili A B, & ad explicandum æquilibrium, & vim in hypomochlium C ſimul conſiderantur.* 2. *Pondera omnia, ſi dictæ ſummæ factorum circa C æquales ſunt, in æquilibrio erunt; id quod & experientia confirmat, & theoria æquilibrii; quotcunque enim utrinque adhibeantur pondera, vel potentiæ, ſemper æquilibrium habetur, ſi potentiæ cum diſtantiis reciprocant, ſive ſi facta ex ſingulis potentiis in ſuas diſtantias utrinque æqualia ſint.* (*Schol.* §. *CXXII.*) 3. *Momenta ponderum P & Q ex una parte, & momenta ponderum p, & q ex altera ſunt æqualia; & quamvis ſingula pondera deorſum tendant, ac*

ac vectem circa C convertere & gyrare nitantur; tamen si potentia tertia in puncto C est adplicata, nullus sequetur motus, sed totum systema in æquilibrio erit. 4. *Ob hanc ipsam caussam punctum C est centrum æquilibrii, & quia in posito casu vires potentiarum P, Q, p, q a gravitate proveniunt, idem est centrum gravitatis.* 5. *Quia directiones ponderum sunt parallelæ, potentia tertia est æqualis summæ eorundem (§. CXXIII.) & in eo puncto, ubi illa adplicanda est, tota vis ponderum collecta concipi potest, nempe in centro gravitatis; certe qui vectem ponderibus oneratum in centro gravitatis sustentat, totam vim ponderum sentit.*

§. CXXX.

Corollarium I. Centrum gravitatis (similiter de centro æquilibrii sentiendum, si aliæ potentiæ gravitati substituuntur) est illud punctum in systemate corporum, a quo desumtæ distantiæ cum ponderibus reciprocant. Ibi enim adplicanda est resistentia, ut systema in æquilibrio sit. Hinc datis binis ponderibus P, & p, quorum directiones sunt parallelæ, eorumque distantia sive longitudine vectis inveniri potest centrum gravitatis, sive punctum, in quo hypomochlion est adplicandum; dicatur longitudo vectis, sive tota ponderum distantia δ; distantia ponderis P a centro gravitatis sit x; erit distantia ponderis alterius $\delta - x$. Est autem vi huius corollarii $P : p = \delta - x : x$; & $P x = \delta p - p x$; unde fit $P x + p x = \delta p$; ac $x = \frac{\delta p}{P + p}$ hoc est, $P + p : \delta = p : x$, *ut summa ponderum ad totam eorum distantiam; ita pondus unum p ad distantiam alterius P a centro gravitatis.* Distantia ponderis p dicatur d; erit $d = \delta - x = \delta - \frac{\delta p}{P + p}$; sive facta redu-

ctione

ctione $d = \frac{\delta P}{P + p}$, ut summa ponderum P + p, ad totam eorum distantiam δ; ita pondus unum P ad distantiam alterius ponderis p a centro gravitatis.

Sit longitudo vectis sive $\delta = 6$ *ped.* $P = 7$ tt. $p = 5$ tt. fiat: $12 : 6 = 7 : \frac{42}{12} = 3\frac{1}{2}$, *quæ erit distantia ponderis p a centro gravitatis; unde distantia alterius ponderis P sit* $= 6 - 3\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$. *Sit longitudo vectis* $= 40$. *pondus* $P = 600$. $p = 200$; *invenietur distantia ponderis P a centro gravitatis* 10, *alterius p distantia* 30.

§. CXXXI.

Corollarium II. Si per centrum gravitatis concipiatur ductum planum verticale, erit summa distantiarum perpendicularium omnium massæ punctorum ex utraque parte æqualis. Sint ex una parte puncta 50 in distantia duorum pedum a fulcro vel centro gravitatis; ex altera parte sint puncta 100 in distantia unius pedis; habebitur æquilibrium, quia massæ, & distantiæ reciprocant; nam $50 : 100 = 1 : 2$. Porro liquet, distantiam 2 pedum quinquagesies sumtam esse æqualem distantiæ unius pedis centies sumtæ; atque hoc modo summæ distantiarum utrinque æquales sunt; quod ex ratione massarum, & distantiarum reciproca necessario sequitur. Eiusmodi planum dicitur *planum gravitatis*, vel *planum distantiarum æqualium*. Si (F. XVII. T.II.) extra systema quotcunque corporum, quorum directiones parallelæ sunt, assumitur quodvis planum SV, erit summa factorum ex quovis pondere in suam a plano SV distantiam æqualis facto ex summa ponderum in distantiam centri gravitatis ab eodem plano; h. e. si pondera sint P, p, π, & *centrum* gravitatis C; erit $P. PA + p. pA + \pi. \pi A = \overline{P + p + \pi}. CA$. Concipiatur per centrum gravitatis C ductum planum verticale; erunt summæ distantiarum ponderis P & p ex una parte, & ponderis π ex altera a plano per C ducto æquales; si iam distantiæ referun-

tur

tur ad planum SV, summæ earundem tantundem augentur, dum pondus π in centro gravitatis C collocatur, & a plano s v magis removetur, quantum eædem minuuntur, dum pondera remotiora P & p collocantur in eodem centro C, & ad planum SV propius admoventur. Si data tempora P, p & π non iaceant in eadem recta (ut in F. XVIII. T. II.) ducta m n ad SV parallela, productaque q P in n & posito in c centro gravitatis inter p & P, erit P: p = Cp : CP = pm : Pn ob similia triangula Cpm, CPn; ac proinde $P \times Pn = p \times pm$. Cum sit pr = pm + mr vel CA; erit p. pr = p. pm + p. CA. & cum sit Pq = nq vel CA — Pn, erit P. Pq = P. CA — P. Pn; adeoque p. pr + P. Pq = p. pm + p. CA + PCA — P. Pn; est autem P. Pn = p. pm; adeoque p. pr + P. Pq = $\overline{p+P}$. CA. Hinc dato systemate quotcunque corporum A, B, C, D inveniri potest centrum gravitatis; cum enim summa factorum ex singulis ponderibus in suas a plano distantias æqualis sit facto ex summa ponderum in distantiam centri gravitatis ab eodem; erit hæc distantia centri gravitatis ab assumto plano æqualis summæ factorum ex singulis ponderibus in suas a plano distantias divisæ per summam ponderum.

Sit (F. XIX. T. II.) data ratio ponderum A, B, C, D, & singulorum inter se datæ distantiæ; assumto plano SV, si in O ponatur centrum gravitatis; *erit* $A. AH + B. BH + C. CH + D. DH = A + B + C + D. OH$; *ac proin*

$$OH = \frac{A.AH + B.BH + C.CH + D.DH}{A + B + C + D}$$

in numeris idem patet; nam $OH = 4$. *est autem*

$$\frac{1.13 + 4.8 + 10.3 + 5.1}{1 + 4 + 10 + 5} = \frac{80}{20} = 4.$$

Ad idem gravitatis centrum O pervenitur, si per analogiam §. CXXX. indicatam primo quæratur centrum gravitatis inter A & B; quod est in m. Dein concipiatur

in

in m adplicatum pondus $= A + B$ *, atque inter hoc & pondus C eodem modo centrum gravitatis quæratur; idque erit in n ; demum in hoc puncto n summa ponderum* $A + B + C$ *ponatur adplicata instar ponderis unius, atque inter* $A + B + C$ *& inter D investigetur commune centrum gravitatis in O.*

§. CXXXII.

Propositio I. *In quovis corpore solido datur centrum gravitatis , idque unicum.* Dem. Quodvis corpus solidum spectari potest vel ut *systema elementorum eiusdem gravitatis* : ita ut duorum quorumvis centrum sit in medio lineæ ea coniungentis , vel ut *systema molecularum inæqualium* , quarum centrum in eo puncto est , a quo desumtæ distantiæ cum iisdem massulis reciprocant. Quocirca cum inter bina quævis elementa , vel binas quasque moleculas sit quoddam centrum gravitatis , in quo totum eorum pondus collectum concipi potest ; si hæc binariorum centra iterum iuncta cogitentur : dabitur horum quoque commune centrum gravitatis , eodemque modo centrum quoddam omnium elementorum, vel molecularum; quisquis earum sit numerus. *Id vero centrum in uno systemate , sive uno corpore non nisi unicum est.* Si enim extra systema elementorum, vel molecularum corpus constituentium assumitur quodvis planum, & summa factorum ex singulis elementis in suas ab eo plano distantias dividitur per summam elementorum, quotus indicat distantiam centri gravitatis ab eodem plano; quemadmodum igitur eodem dividendo, & divisore posito non nisi unicus quotus obtinetur ; sic non nisi unicus est valor exprimens distantiam centri gravitatis ab eo plano : h. e. unicum duntaxat in quovis corpore centrum est gravitatis , eo prorsus modo , ac in vecte adplicatis certo loco ponderibus non nisi unicum est punctum , a quo desumtæ omnium datorum ponderum distantiæ cum iisdem reciprocant.

Centrum gravitatis non semper idem est , ac centrum figuræ , vel magnitudinis. Centrum figuræ adpellatur medium figuræ , aut solidi punctum , a quo lineæ omnes K ad

ad figuræ angulos ductæ sunt æquales ; quale reperitur in quovis polygono regulari, aut symmetrico, quod lateribus æqualibus, & parallelis constat. Siquod in data figura, aut solido est punctum, per quod ducta recta, vel ductum planum illud dividit in partes magnitudine æquales, id est centrum magnitudinis : contra centrum gravitatis est, per quod ducta recta vel planum corpus dividit in partes æquiponderantes. Incidunt aliquando in se se hæc centra, ut in circulo, sphæra &c. si partibus homogeneis constant: sæpe distant : multæ figuræ carent centro magnitudinis : centrum gravitatis nullibi deest. Quamvis omnes dimensiones geometricæ, ceu lineæ, superficies, solida, omni proprietate physica, adeoque & gravitate careant ; expedit tamen concipere singula puncta lineæ viribus quibusdam prædita, ut centrum æquilibrii, & gravitatis in quavis dimensione quæri, inventumque ad corpora physica transferri possit sub certa hypothesi, si ea satis homogenea sint, & elementis æquabiliter distributis constent. Centrum gravitatis inest in quovis corpore singilatim: centrum gravium adpellatur telluris centrum, in quod omnia tendunt. Centrum gravitatis commune adpellatur, quod habent plura corpora diversa, quæ unum systema componunt.

§. CXXXIII.

Theoremata, ac Lemmata de Centro Gravitatis Dimensionum Geometricarum.

I. *Centrum gravitatis lineæ rectæ est medium eius punctum.* Si enim singula puncta lineæ ceu totidem potentiæ æquales vel pondusculа æqualia concipiuntur, bina quævis puncta ex utraque medii parte æquidistant a centro gravitatis ; summa igitur momentorum omnium utrinque æqualis est.

II. *Ut centrum gravitatis in perimetro trianguli reperiatur*, iungantur (F. XX. T. II.) puncta media d & e binorum quorumvis laterum AB, BC, & recta iungens de, cuius extremis punctis adplicata sint pondera longitudini linearum iunctarum proportionalia ; quorum inventum gravitatis centrum f iungitur cum medio puncto g tertiæ lineæ AC ; recta iungens fg rursus habetur

pro

pro vecte, in cuius uno extremo f est pondus A B + B C; in altero extremo g pondus A C; quo modo inveniri denique potest commune centrum gravitatis omnium laterum ceu in H. Hac eadem methodo centrum gravitatis reperitur in quovis dato systemate rectarum etiam non concurrentium.

III. Ut inveniatur centrum gravitatis trianguli, vel superficiei triangularis, (F. XXI. T.II.) ex binis angulis quibuscunque A, & D agantur ad puncta media laterum oppositorum binæ rectæ; dico in earum concursu C fore centrum gravitatis; nam quarumvis rectarum basi parallelarum, quas recta A F in partes æquales, ut ipsam basin B D secat, centra gravitatis iacent in recta A F, adeoque & centrum gravitatis totius areæ iacet in A F; similiter vero demonstratur, quod centrum gravitatis totius areæ iaceat in recta D E, atque adeo in communi intersectionis puncto C; cum unicum tantum in quavis dimensione esse possit. Colliges: centrum gravitatis trianguli a vertice distat duabus tertiis partibus rectæ ex vertice ad baseos punctum medium ductæ, seu punctum C ex tota A F resecare trientem C F. Cum enim ducta E F bifariam dividat latera A B, B D, erit $BE : AE = BF : DF$, proin rectæ E F, A D sunt parallelæ. Hinc ob similitudinem triangulorum E C F, A C D, erit $AC : CF = AD : EF = AB : AE = 2 : 1$. sive $AC : CF = 2 : 1$, & $AC + CF : CF = 2 + 1 : 1$. Idem valet, quiscunque angulus pro vertice, & quodcunque oppositum latus pro basi sumatur. Quapropter centrum gravitatis trianguli obtinetur, si sumantur duæ tertiæ partes cuiusvis rectæ e quovis angulo ad lateris oppositi punctum medium ductæ.

IV. *Centrum gravitatis trapezii* invenitur, si id per diagonalem in bina triangula dividitur, quorum centra gravitatis coniungens recta habetur pro vecte, cuius extremis adpensa intelliguntur pondera iis triangulis proportionalia, inter quæ centrum gravitatis reperiri potest.

V. *Polygona irregularia* dividuntur in tot triangula, quot sunt latera demtis duobus; singulorum superficies, ac centra gravitatis, demum commune centrum omnium reperitur.

VI. Centrum gravitatis tum *peripheriæ tum figuræ circularis vel ellipticæ* incidit in centrum figuræ: itemque centrum gravitatis parallelogrammi, polygoni regularis, cumque *cylinder* ex infinitis circulis, & *parallelopipedum* ex infinitis parallelogrammis ceu elementis constet; idcirco centrum gravitatis in hisce solidis in medio axis centra gravitatis basium coniungentis consistit, si ea homogenea sint.

VII. Centrum gravitatis *pyramidis polygonæ* cuiusvis a vertice distat $\frac{3}{4}$ rectæ ex vertice ad centrum gravitatis baseos ductæ; hinc centrum gravitatis coni seu recti seu obliqui distat a vertice $\frac{3}{4}$ axis.

§. CXXXIV.

Definitio. *Linea directionis corporis* est quævis recta e centro gravitatis ad horizontem perpendicularis; generatim quævis recta per centrum gravitatis ducta, *diameter gravitatis* adpellatur.

§. CXXXV.

Propositio II. *Quamdiu centrum gravitatis corporis, vel systematis sustentatur, totum pariter sustentatur corpus, vel systema.* Patet ex notione centri gravitatis, quod illud est punctum, in quo adplicata resistentia æquilibrium cum systemate efficit, & circa quod si sequeretur motus, is ex utraque parte æqualis, & alter alteri oppositus esset.

Quamdiu in vecte punctum illud, a quo desumtæ distantiæ cum ponderibus reciprocant, sustentatur, totus vectis, omniaque adpensa pondera sustentari debent. Porro quodvis corpus vel systema corporum eiusmodi vectem exhibet; nam perinde est, sive pondera utrinque concipiantur adpensa ad vectem, sive eorum vis tota in ipso suspensionis puncto immobiliter fixa concipiatur, ut adeo totus vectis quomodocunque oneratus instar unius massæ solidæ considerari queat; ut, quemadmodum in vecte sustentato centro gravitatis, omnia pondera sustentantur; sic idem in quovis corpore, aut systemate corporum usu venire debeat.

§.

§. CXXXVI.

Propositio III. *Corpus cuiuscunque figuræ, aut massa plano horizontali insistens, nullaque alia vi impulsum, vel retentum, quam proprio pondere, consistet in suo situ, nec labetur, quamdiu linea directionis intra basin corporis cadit: si vero hæc linea cadat extra basin: labetur versus eam partem, in quam linea directionis cadit.* Nam centrum gravitatis, si corpus plano horizontali insistit, nullaque extranea vi impellitur, duntaxat secundum directionis lineam nititur ad motum, nullumque alium habet nisum, vel directionem; si igitur hæc linea intra basin corporis cadit, centrum gravitatis sustentatur: igitur & totum corpus: contrarium fit, si cadit extra basin.

§. CXXXVII.

Propositio IV. *Quodvis corpus polyedrum (quotcunque laterum, etiam infinitorum uti sphæra) plano inclinato impositum per sese, & remoto omni affrictu per planum lubricat, sive repit, id est, sine ratione descendit, utcunque cadat linea directionis sive extra sive intra basin eius corporis; modo perpendicularis ex centro gravitatis in planum ducta intra basin cadat.* Si enim vis normalis, qua corpus agit in planum inclinatum, ab eodem plano excipitur, ac sustentatur, motus corporis per planum fit per vires relativas longitudini plani parallelas, ita ut quodvis punctum corporis plano impositi, atque ipsum maxime centrum gravitatis ea vi & directione parallela urgeatur; hinc polyedrum, si nihil obstat, per planum inclinatum repere cogitur super basi sua. At vero quia motu polyedri inchoato per vires relativas, basis resistentiam patitur ob affrictum, perinde ac si vis contraria eidem basi imprimeretur; hinc vis relativa, & celeritas partium inferiorum minuitur, & a partibus superioribus prævertitur; quapropter si linea directionis cadit extra basin (F.XXII. n.2. T.II.) polyedrum rotatur circa angulum solidum o; quia centrum gravitatis descendere potest per arcum e n, cuius quodvis punctum n propius est lineæ horizonta-

 li

li a b, quam punctum e. At vero si (n. I.) linea directionis Z u cadit intra basin corporis plano impositi, polyedrum Z non rotabitur; nam rotatio fieret circa angulum solidum C, ac centrum gravitatis describeret arcum Z i, & in i ab horizontali A B magis distaret, quam antea. Nam in triangulo C m Z latus C Z ob angulum oppositum maiorem est maius quam Z m distantia ab horizontali; quare etiam C i = C Z erit maior distantia; Polyedrum igitur hoc casu rotari non potest, quin centrum gravitatis ascendat. Unam addidi limitationem: *modo perpendicularis ex centro gravitatis in planum ducta intra basin cadat.* Nam cadat extra; ut P r (n. 3.) perspicuum est, quod vi & directioni absolutæ P d, planum non ita obsistat, ut vis normalis P r a plano sustentetur, & extinguatur; quapropter etsi partes inferiores corporis P, queis plano insistit, nullam paterentur celeritatis imminutionem; tamen centrum gravitatis secundum lineam directionis P d moveri, ac corpus P labi deberet.

Multi in hac re lapsi sunt opinione quidem mea; ac fortassis paradoxum non nullis videbitur, sphæram plano inclinato impositam per illud repere, non rotari debere. Quapropter respondendum est ad opposita argumenta. Ac I. generatim statuunt: corpus cuicunque plano insistens labitur, si linea directionis cadit extra basin. R. Si corpus plano horizontali *insistit, eiusque directionis linea extra basin cadit; labitur; verissime id dictum. At si plano inclinato imponitur, eiusque vis pressiva seu normalis a plano extinguitur, vires habet relativas seu plano parallelas, quarum directione descendit; non autem rotatur remoto affrictu; quia nulla est rotationis caussa. II. Corpus in plano horizontali positum, si linea directionis extra id planum cadit, rotatur: igitur idem in plano inclinato continget. R. In plano horizontali centrum gravitatis nullum exerit nisum, quam verticalem secundum lineam directionis, ob quem, si hæc extra basin cadat, centrum gravitatis, cum minime sustentetur, deorsum ruet, ac polyedrum circa angulum convertet. At in plano inclinato centrum gravitatis vim ac directionem plano parallelam habet; huic igitur obsequetur, quamdiu nulla adest, rotationis caussa, id est, si remoto affrictu partes inferio-*

res

res basis eadem, qua superiores celeritate per planum descendere queant.

III. Si polyedrum (n. 2.) rotatur, centrum gravitatis e descendens per arcum e n propius accedit ad horizontem; atqui si potest, debet sane accedere. R. Quia vis absoluta est obliqua ad planum, & vis pressiva seu normalis in planum, huius reactione extinguitur, sola retinetur vis parallela; per hanc igitur accedet ad horizontem. Illud addendum: Si per affrictum aut vim contrariam celeritas partium inferiorum magnopere minuitur, & excessus celeritatis iam acquisitæ a partibus superioribus par sit centro gravitatis ad eam altitudinem elevando, ad quam illud rotatione elevari debet, tum corpus descendens rotabitur opinione quidem mea, etsi centrum gravitatis cadat intra basin.

§. CXXXVIII.

Applicatio Theoriæ.

I. Corpus in centro gravitatis suspensum ex linea flexili, manet in ea positione, quæ illi datur; sic enim dum punctum suspensionis seu obstaculum & centrum gravitatis in eadem recta sunt ad horizontem perpendiculari, & centrum gravitatis, & totum corpus sustentatur. At corpus ex quovis alio puncto libere suspensum, tamdiu circa punctum suspensionis converti debet, donec illud sit in linea directionis. Nam obstaculum, sive punctum suspensionis vim centri gravitatis elidit; ergo in eadem recta concurrere debent. Hoc modo empirice determinatur centrum gravitatis superficierum; suspenditur nempe superficies ex quovis puncto, ac notatur perpendicularis per hoc punctum transiens, quæ erit diameter gravitatis; tum corpore ex alio puncto suspenso rursus notatur verticalis per hoc punctum transiens; quæ erit alia diameter gravitatis. Punctum intersectionis utriusque diametri est centrum gravitatis superficiei. Reperitur etiam diameter gravitatis, siquod corpus aciei prismatis, chordæ, aut extremitati mensæ imponatur, quærendo situm in quo partes utrinque æquilibrium teneant. Si corpus A B (F.

XXIII. T. II.) per funes flexiles d e, f g in e & g suspenditur, illud una cum funibus ita inclinatur, ut si ii concipiantur producti, donec concurrant in K, punctum concursus & centrum gravitatis C sint in eadem linea ad horizontem normali. Sit vectis A B (F. XXIV. T. II.) qui concipiatur divisus in partes æquales octo. Corpus oblongum, & homogeneum M N in totidem partes æquales divisum filo flexili E e in distantia ab hypomochlio C ut 3, & ex altera parte filo flexili D d in distantia ut 1 adplicetur vecti: dico, corpus oblongum in æquilibrio fore, eiusque gravitatis centrum fore directe infra C hypomochlium vectis. Nam partium e f, e g centrum gravitatis transit per filum flexile E e, ita ut in E sit vecti adplicatum pondus ut 2: partium vero d f, d h centrum gravitatis est in recta D d, ita ut in D censeatur adplicatum pondus ut 6; cum igitur hæc pondera D & E = 6, & 2 ac distantiæ E C, C D = 3 & 1 reciprocent, in vecte dabitur æquilibrium. Centrum vero gravitatis corporis oblongi erit in O puncto, a quo desumtæ distantiæ d O, e O cum ponderibus 6 & 2 reciprocant, hoc est immediate infra hypomochlium C. Unde patet, cum pondus partium f e, e g circa e in æquilibrio sit, id in hoc puncto e, vel E veluti collectum, & concentratum concipi posse; similiter pondus partium h d, & d f, quodam modo in d, vel D collectum; inter centra partialia e & d commune gravitatis centrum est in O. Sit vectis A B (F. XXV. T. II.) cuiuscunque figuræ, aut ponderis; fulcrum in C; onus movendum P in A, potentia movens p in B. Brachii A C centrum gravitatis sit in Q, & brachii C B centrum gravitatis in q. Tum vero si brachia A C, B C remotis ponderibus P & p in æquilibrio sint, concipi potest, ac si vectis careret omni pondere, & in Q & q pondera gravitati eorum brachiorum æquipollentia ad lineam geometricam essent adplicata. Si (F. XXVI. T. II.) linea vel pertica gravis P A sustentatur in A, pondus omnium punctorum lineæ, aut partium perticæ perinde agit in fulcrum A, ac si id in medio lineæ puncto collectum, & linea P A gravitatis expers foret.

II.

II. Artifices ut a lapſu præſervent corpora, iis ampliores baſes adfigunt, vel corpora prope baſin graviore materia onerant, ut linea directionis quovis levi impulſu aut motu extra baſin ampliorem non exeat, aut centrum gravitatis propius ad baſin accedat; uti fit in candelabris. Quæ in cuſpidem, aciemve deſinunt corpora, ei impoſita ægre manent erecta, levi enim aeris motu linea directionis extra baſin vagatur: at ponderibus æquilibrantibus utrinque onerata citra lapſum agitari poſſunt. Quædam corpora videntur ſponte ſua aſſurgere, aut ſurſum tendere, cum eorum gravitatis centrum reipſa deſcendit; uti fit in cono duplicato, qui per planum inclinatum aſcendere videtur; Sit (F. XXVII. T. II.) circulus A B D communis baſis conorum, in C centrum gravitatis utriusque. Sit D F latus regulæ acclivis, ita ut F G ſinus anguli inclinationis ſit minor radio C D circuli baſeos, centrum gravitatis C in ſitu C D magis diſtat a linea horizontali, quam ſi perveniat ad F; reipſa igitur id centrum deſcendit, dum conus per planum aſcendere videtur. Similiter ſi lateri cylindri cavi adfigitur materia quædam gravis ceu plumbum, isque ita imponatur plano inclinato, ut plumbum ſuperiorem plani partem reſpiciat, centrum gravitatis deſcendet verſus inferiorem partem, & cylindrum ſurſum aget. Qua ſimili ratione aliquando teſſeræ, aut globi luſorii adulterantur. Filum ferreum (XXVIII. T. II.) recurvum & pondere gravatum uno extremo, & altero exiguæ baſi ceu extremitati menſæ incumbens ſuſtentatur ob centrum gravitatis per baſin tranſiens, idem rationem vectis acutangularis A C B habet.

III. Admiranda inprimis eſt naturæ ſagacitas in locando centro gravitatis, eoque intra baſin conſervando. Ita enim illa corpora omnium animalium compoſuit, ut, cum pedes fulcri, aut baſeos vices gerant, ex utroque latere pondus adſit æquale, & linea directionis cadat intra baſin; unde regulæ etiam ſaltandi, arma tractandi, & artes funambulorum derivantur, qui baculum ſat gravem manu tenent, eumque modo in hanc partem protrudunt, ut centrum gravitatis intra baſin conſervent. Quæ partes geminatæ ſunt in cor-

pore animali, earum una in uno, altera in altero latere æquidistat a medio; contra partes simplices medium tenent locum. Ab ipsa natura discimus, ut, cum per declive descendimus, corpus aliquantum retrorsum, in ascensu vero prorsum flectamus, uti idem fit ab iis, qui dorso impositum onus baiulant: qui obeso sunt corpore, situ magis erecto incedunt: qui de sella surgit, corpus in anteriorem partem inclinat, ac pedes retrahit, ut centrum gravitatis versus eam promoveatur partem, quam stans acquirit: qui nutat in unam partem, brachium & crus extendit in alteram: si calces coniunctim muro apponimus, nihil tollere e terra possumus; homo uni insistens pedi, facili impulsu labitur, ac corpus versus eam partem, cui insistit, flectit: qui luctantur, pedibus divaricatis consistunt, quo ampliore basi gaudeant. Aves longiore collo gaudentes longos etiam pedes habent, quos volando retrorsum extendunt, sicut ciconiæ. Eædem uni etiam pedi tuto insistunt, quia ob prælongos, & in orbem sparsos unguiculos basis sat ampla est relate ad massam corporis exiguam; si caput sub alta condunt, in illud latus id inflectunt, ex qua parte pedi uni insistunt.

IV. Celebrantur etiam muri inclinati, & turres præsertim Bononiensis, Pisana, coloniensis, quæ etsi inclinatæ sint, longo tempore firmæ consistunt, eoquod lineæ directionis per basin transeant. Accedit, quod turres ob decrescentem latitudinem murorum versus verticem ad figuram pyramidum vel conorum, haud penitus cavorum accedant, in quibus centrum gravitatis magis removetur a vertice; ob hanc caussam, si plano inclinato imponas cylindrum, ac conum eiusdem altitudinis ac baseos, citius labetur cylinder, quam conus. Similiter currus fœno, aut tritico onusti ad magnam altitudinem per vias declives citius evertuntur, quam currus humiliores.

V. *Sit denique* (exercitationis caussa) *parallelopipedum A B D H* (*F. XXIX. T. II.*) *per totam longitudinem homogeneum*) *&* *grave, in cuius punctis extremis A, & B adpensa sint pondera P, & Q; oportet determinare punctum C, cui potentia tertia seu resistentia*

est

est adplicanda, ut ea parallelopipedum ponderibus P & Q, ac propria etiam gravitate oneratum in æquilibrio teneat. Resolutio. Quoniam id solidum ex hyp. homogeneum est, & symmetricum, eius centrum gravitatis in medio puncto sectionis M basi parallelæ consistet. Concipiatur in eo puncto adpensum pondus N æquipollens ponderi totius solidi. Sit longitudo eiusdem L; ponaturque planum S V, ita ut distantia A S sit $= 1$. Distantia centri gravitatis a pondere Q sit x; erit distantia alterius ponderis P a centro gravitatis $= L - x$. Quoniam ex §. CXXXI. summa factorum ex quovis pondere in suam ab assumto plano distantiam æqualis est facto ex summa ponderum in distantiam centri gravitatis ab eodem plano, erit

$$P + N + \frac{LN}{2} + Q + LQ = (P + Q + N)(1 + L - x):$$

facta membri alterius multiplicatione, & reductione utriusque erit $\frac{LN}{2} = LP + LN - Px - Qx - Nx$.

$$\& \; 2Px + 2Qx + 2Nx = 2LP + LN$$

unde fit $x = \frac{\overline{2P + N}.\,L}{2(P + Q + N)}$.

Colliges I. Si præscinditur a gravitate solidi, seu vectis, hoc est, si ponitur $N = 0$; erit $x = \frac{PL}{P + Q}$; sive ut summa ponderum $P + Q$ ad totam eorum distantiam L; ita pondus P ad distantiam alterius ponderis Q a centro gravitatis; uti ostensum est §. CXXX.

2. Si ponitur $P = Q$; erit $x = \frac{\overline{2P + N}.\,L}{2(2P + N)} = \frac{1}{2}L$.

Hoc est, si pro vecte sumitur corpus symmetricum grave, eique æqualia utrinque adpenduntur pondera, centrum gravitatis etiam computata propria gravitate vectis est in medio. vid. N. I. huius §.

3. Si

3. Si ponitur $P = 0$; erit $x = \frac{LN}{2Q + 2N}$; hoc est, si corporis homogenei & æqualiter extensi e. g. cylindri, vel parallelopipedi gravitate sua præditi uni duntaxat extremitati adplicatur pondus, inveniri potest punctum, ubi fulcro est imponendum, ut pars prominens vi suæ gravitatis cum altera parte, & adpenso pondere æquilibrium obtineat. Si sumitur regula lignea gravis, cuius pondus $N = 29$ drachm. longitudo $L = 208$ lin. pondus $Q = 101$, erit x, seu distantia ponderis Q a fulcro $= \frac{29 . 208}{2 . 101 + 2 . 29} = 23 \frac{1}{2}$ proxime, hoc est fulcrum non omnino binis pollicibus distabit a pondere, uti experientia comprobat. Discimus ex hoc casu, quomodo onus super humero commodissime gestari queat, si nempe baculus cum adpensa sarcina ita humero imponitur, ut ipsius pars anterior sola in æquilibrio sit cum parte posteriore, & onere adpenso; tum enim manus facillime reget baculum, & in suo situ servabit, neque brachii vis premens fatigabit humerum; atque ita leve fit, quod bene fertur onus.

CAPUT III.

De Statera, Libra, & Axe in Peritrochio.

Examinato gravitatis centro de instrumentis mechanicæ, ac machinis adcuratius disseri potest. Machinæ omnes vel ad vectem revocantur, vel ad planum inclinatum. De utroque genere agendum; ac primo de statera, libra, & axe in peritrochio, in quibus ratio vectis clarius perspicitur.

§. CXXXIX.

Definitio I. *Statera Romana*, ut vulgo adpellatur, est pertica, aut virga rigida inæqualium brachiorum, cuius ope corporum præsertim graviorum pondera explo-

plorantur. Eius partes sunt 1. ipsa virga A I (F.I. T.III.) quæ *iugum* , vel *scapus* dicitur ; 2. *axis* , circa quem scapus mobilis est. 3. *Trutina* , vel *ansa* D , cui axis inseritur. 4. *Lingula* (vel *examen*) C e ad scapum verticalis , quæ si intra trutinam absconditur , situm horizontalem iugi indicat. 5. Lanx vel uncus O , ex quo corpora suspenduntur , quorum pondus quæritur. Brachium minus C A fere crassius est longiore ; ut illud una cum lance, vel unco in æquilibrio sit , antequam adplicentur pondera. In longiòre brachio pondus constans p, quod *cursor*, vel *bolis* dicitur, adhibetur ; idque tamdiu removetur a fulcro C , donec cum onere examinando in æquilibrio sit. Id brachium longius dividitur in certas partes, ut distantia bolidis a fulcro statim innotescat. Ea divisio fere sit empirice, designando primum puncta, in quibus pondera æqualia utrinque æquilibrium tenent; dein aliud punctum brachii longioris determinatur , in quo bolis duplum pondus prioris sustentat , & aliud punctum , in quo sustentatur pondus triplum ; atque ita porro. Triplex steræ species est. I. Cum pondus p notum per brachium C I est mobile , lanx autem O , & ansa D immobiles : hæc species in usu est maxime. II. Si ansa est mobilis : lanx autem , & pondus immobiles. III. Quando lanx mobilis ; pondus autem, & ansa non moventur. In omni casu statera est vectis heterodromus per se inæqualium brachiorum, etsi hæc, præsertim si ansa mobilis est, æqualia fieri queant.

§. CXL.

Problema I. *Ope steræ determinare pondera corporum.* Res. Cum in vecte posito æquilibrio pondera & distantiæ reciprocent ; hinc dato uno pondere seu cursore p , eiusque distantia d ; item alterius ponderis O distantia D ; erit $O = \frac{pd}{D}$. Sit p = 5 tt ; distantia reperitur tamdiu illud per brachium movendo , donec æquilibrium obtineatur ; cuius indicium est lingula intra trutinam erecta. Sit hæc distantia d = 10 ; ac D = 2.

erit

erit $O = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$. sit $D = 1$. $p = 4$. $d = 12$; erit $O = 48$. Magnæ ſtateræ ferreæ uſui in primis ſunt curribus onuſtis ponderandis.

§. CXLI.

Definitio II. *Bilanx* ſeu *libra* eſt vectis æqualium brachiorum, cuius ope de æqualitate ponderum iudicamus. Eius partes fere eædem ſunt, ac in ſtatera, nempe *ſcapus* vel *iugum*, quod in bina brachia æqualia dividitur ab *axe*, & *trutina* : *lingula*, ſeu *examen* : *lances binæ*.

§. CXLII.

Problema II. *Examinare libram.* Ut de ponderum impoſitorum æqualitate iudicari poſſit, neceſſe eſt 1. ut brachia ſint eiusdem longitudinis, & ponderis; atque ut lances quoque idem habeant pondus. Utrumque deprehenditur, ſi libra vacua a pondere peregrino, & ſepoſitis etiam lancibus ſitum horizontalem teneat, ſive ita conſiſtat, ut lingula intra trutinam abſcondatur; tum adhibitis lancibus, iisque etiam permutatis idem obſervetur; ſi removeri lances nequeant, pondera, quæ æquilibrantia deprehenduntur, etiam tum in æquilibrio eſſe debent, ſi alterum in alterius lancem transfertur. Fallacia libræ in eo eſt, quod ſtatera in bilance obtrudatur; ſi nempe brachia ſunt inæqualis longitudinis, quæ tamen remoto peregrino pondere ſitum horizontalem obtinent propterea, quod ſimul inæqualis ponderis ſint; ac tum merx longiore brachio adpenſa æquilibrabit cum alio noto pondere, etſi ab hoc deficiat. Dolus detegitur ponderis, ac mercis permutatione.

Ad perfectionem bilancis præterea requiritur 1. *ut quam minimo ponduſculo ſitum mutet. Hinc axis fere in aciem deſinit, ut fulcro annulari incumbens facile mobilis ſit.* 2. *Brachia longiora præſtant. vix enim effici poteſt, ut penitus æqualia ſint; erit autem differentia ponderum, quæ videntur æquilibrare, eo minor, quo maior eſt longitudo brachiorum. Sint eiusmodi pondera P, & Q. brachium,*

chium, ex quo pendet P, sit L, alterum sit L + l tantillo longius. Si videntur æquiponderare, erit $PL = QL + Ql$; *&* $Q = \frac{PL}{L+l}$ *sit aliqua differentia P — Q; erit hæc differentia* $= P - \frac{PL}{L+l} = \frac{Pl}{L+l}$. *hæc igitur differentia eo minor sit, quo maior est longitudo L. ac sit, ponitur* $l = o$, *hoc est, si brachia essent penitus æqualia, erit* $\frac{Pl}{L+l}$, *differentia pariter* $= o$.

3. *Firmitas, & crassities brachiorum ponderibus examinandis proportionata esse debet; cavendum enim, ne ultra firmitatem suam oneretur bilanx, & brachia incurventur, ac fides illius propterea corrumpatur.* 4. *Ne lingula brachii inclinati pondus augeat; ei in scapi parte inferiore contrapondium addi solet.* 5. *Est aliud præterea libræ requisitum, recta positio centri motus; ad quam pertinet sequens*

§. CXLIII.

Problema III. *Determinare in libra positionem centri motus, ut ex situ horizontali iugi ponderum æqualitas tuto explorari possit.* Resolutio. Sit F. II. T. III. iugum libræ A B; puncta suspensionis A & B; centrum motus C. manifestum est, id punctum C in libra esse in aliquo puncto rectæ P C, quæ iugum A B secat bifariam, ut centrum motus ab utroque suspensionis puncto distet æqualiter. At quæri potest, utrum centrum motus C poni debeat in ipsa recta A B coniungente puncta suspensionis; an supra rectam A B in D, vel directe infra in d. Dico, *ut ex situ horizontali iugi ponderum æqualitas tuto explorari possit, centrum motus non in ipsa linea iugi A B, nec infra, sed supra eam collocandum esse.* Dem. Sit *primo* centrum motus in ipsa linea A B; quiescet libra in quocunque situ obliquo a C b, etsi pondera in A vel a, & B vel b adpensa sint æqualia; quia posita quacunque iugi inclinatione æquales manent eorundem a centro motus distantiæ C m, C n ob æqualitatem triangu-

lo-

lorum C a n, C b m. quapropter ex *solo* situ horizontali, ponderum æqualitas non colligitur, uti nec inclinatio iugi indicio est, pondera esse inæqualia. Dein si alterum pondus e. g. B vel pauxillo maius est, iugum mox situm verticalem adfectabit, & lances evertentur; quod in usu libræ valde molestum est.

Secundo sit centrum motus (F. III. T. III.) infra lineam iugi A B. Si iugum hoc casu vel paullum dimoveatur a linea horizontali, non redibit ad eum situm, sed vertetur, & gyrabit circa centrum C; donec b sit in A, & a in B, etsi pondera in A & B sint æqualia. Posita enim quavis inclinatione a C b erit distantia n C ponderis A minor, quam distantia C m ponderis B; istuc igitur perpetuo prævalebit, donec subvertatur totum instrumentum. Si pondera sunt inæqualia; hoc rursus ita accidet; hinc ad usum commodum bilancium hæc centri positio adhiberi non potest.

Tertio sit centrum motus non in ipsa linea, sed supra eam in D; tum vero æqualia pondera a situ horizontali dimota ad eundem mox redeunt, nec ullo situ obliquo consistunt; nam (F. IV. T. III.) pondus B elevatum maiorem distantiam D m, quam pondus A depressum habet; illud igitur ob maius momentum prævalebit, & ad situm horizontalem redibit. Patet igitur, centrum motus supra lineam A B puncta suspensionis coniungentem collocari debere, ut ponderum æqualitas ex situ horizontali tuto explorari possit. Cavendum tamen, ne iusto altius elevetur id centrum; secus libra evadet pigra, & inæqualitatem ponderum ægre indicabit.

Corollarium I. Ex dictis intelligitur ratio sequentis experimenti (F. V. T. III.) Extremis punctis iugi A B duo cubi eiusdem molis ac ponderis ita adfigantur, ut supra, vel infra iugum ambo existant. Si *supra iugum* extiterint (F. V. T. III.) uno tantisper elevato in a, uterque circa axem C rotatus situm priori oppositum acquiret: *Si infra*; (F. VI.) cubus B elevatus in b relabetur illico, & priorem situm tuebitur. Si iugum A B in se spectetur, centrum motus, & centrum gravitatis in idem punctum C incident; at ob affixos cubos graves

cen-

centrum gravitatis ex C transfertur in f. Quare cubis sursum spectantibus centrum gravitatis f supra centrum motus existet, adeoque iugum vertetur, ac cubi ad situm oppositum pervenient. In hoc dein situ, dum cubi deorsum spectant, ac centrum gravitatis f infra centrum motus C existit, iugum a situ horizontali dimotum eundem post aliquot oscillationes recuperabit, uti ex iis, quæ §. præc. n. 3. dicta sunt, perspicuum est.

§. CXLV.

Corollarium II. Uti in omni vecte, sic in libra, quæ est vectis æqualium brachiorum, momentum ponderis vel potentiæ est ut factum ex vi absoluta, quam habet in distantiam a centro motus; quod quidem factum eiusdem potentiæ *vis relativa*, vel ***momentum*** nuncupatur. Ex quo derivanda est ratio alterius experimenti, quod sane mentionem meretur. Si homo insistens lanci libræ maioris ad æquilibrium reducitur cum pondere in altera lance posito, ac dein manu sua, vel ope baculi partem quandam iugi sursum trudit, destruet hoc pacto æquilibrium; & lanx illa, cui insistit, præponderabit. Ut ratio huius experimenti perspiciatur, sit F. VII. T. III.) iugum AB, ex quo lances pendent. vir insistens lanci D, & æquilibratus cum pondere in E posito sursum impellat vel partem AC in H, vel partem BC in K; dico, quod lanx D sit descensura. Cum enim actio, & reactio semper æquales & oppositæ sint, necesse est, ut quæcunque vis ex D agat contra punctum H, vel K, par omnino & opposita vis vel impressio agat in lancem D, hæc contraria impressio vel pressio in lancem D perinde se habet, ac si iugo esset adplicata in A puncto suspensionis; consequenter eadem vis, quæ sursum premit puncta H, vel K, deorsum premit punctum A. Posito igitur V pro hac vi, exprimet quantitas V. HC momentum, quo brachium AC sursum agitur, dum fit impressio in H, & quantitas V. KC exprimit momentum, quo brachium BC sursum agitur, dum fit impressio in K; in utroque autem casu quantitas V. AC exprimit momentum, quo brachium AC ob

reactionem urgetur deorsum. Quamobrem cum facta impressione in H vis relativa sursum = V. H C sit minor vi relativa deorsum, quae est = V. A C; lanx D descendet differentia harum virium, quae est = V. A H. Dum autem sit impressio in K, inprimis eadem vi relativa = V. K C, qua brachium B C in K sursum truditur, brachium A C urgetur deorsum; ob reactionem autem idem brachium A C deorsum agitur vi relativa = V. A C; quapropter descendet summa harum virium, quae est = V. A K. Igitur universe si distantia puncti illius, in quo sit impressio sursum, a puncto A ponitur = D, erit vis, qua lanx descendit = V. D. ac si fit impressio in A, nullus sequetur motus; si in B, omnium maximus.

§. CXLVI.

Definitio. *Axis in peritrochio* (F. VIII. T. III.) est cylinder, vel tympanum ope rotae concentricae, quae *peritrochium* dicitur, circa axem mobilis. Coniungitur nempe rota maior, & rota minor, quarum centra pertransit communis axis, ita ut rotae sibimet adfixae simul circumvolvantur; peripheriae rotae minoris adplicatur onus, & peripheriae rotae maioris potentia. Rota maior, ut potentiae ab axe ceu fulcro distantia augeatur, instruitur prominentibus ex peripheria bacillis, qui *Scytalae* dicuntur: imo omissa maiore rota scytalae longiores adhibentur minori rotae vel cylindro infixae, saepe etiam zona circularis aut cylinder cavus. Haec rota maior, zona, vel cylinder cavus, aut scytalae, quae vicem earundem obeunt, dicitur *peritrochium*, velut circumcurrens, rota vero aut cylinder minor, cui onus adplicatur, nuncupatur *axis*; hinc tota machina *axis in peritrochio*, & si axis situ horizontali iacet, *succula*; si verticaliter erigitur, *ergata* vocatur.

§. CXLVII.

Propositio. *Si potentia ad radium peritrochii vel ad scytalam, & pondus ad radium axis perpendiculariter adplicantur, potentia est ad pondus, ut radius axis ad radium peritrochii.* Dem. Axis in peritrochio reipsa est ve-

vectis heterodromus, cuius hypomochlion est in medio puncto diametri per axem transeuntis: distantia ponderis est radius axis: distantia potentiae radius peritrochii, sive longitudo scytalae; ex quo patet, potentiam ad pondus esse reciproce, ut est distantia ponderis, sive radius axis ad distantiam potentiae sive radium peritrochii aut longitudinem scytalae. Sit potentia p pondus O, radius axis A, radius rotae maioris, vel peritrochii R; erit $p : O = A : R$; & $p = \frac{AO}{R}$. Ponantur $A = 2$. $R = 30$. $O = 1000$; erit $p = 66$ proxime.

§. CXLVIII.

Corollarium. Dum potentia peripheriam suae rotae vel peritrochii semel percurrit, & axis semel circumagitur, ac funis axi semel circumvolvitur, pondus attollitur per spatium aequale peripheriae axeos; hinc spatia percursa, & celeritates potentiae ac ponderis sunt ut peripheriae rotarum, hae ut radii, hoc est reciproce, ut potentia, ac pondus. Huc igitur pertinet quodvis genus machinae, qua potentia in gyrum agitur, simulque axem, vel cylindrum, cui pondus adplicatur, circumagit; estque huius machinae usus perfrequens. Nam ope simplicis vectis pondus non nisi ad altitudinem brachii brevioris elevari potest; hinc rota in axe adhibetur, ut infiniti veluti vectes tot nimirum, quot sunt radii in quovis circulo simul uniantur, sive vectis quidam perpetuus efficiatur; quia uno radio depresso mox alius succedit. Claves, quibus ad elateres horologiorum adducendos utimur, sunt axes in peritrochio, modo succulae, modo ergatae pro vario horologii situ. Succularum maximus est usus in fodinis, altisque aedificiis, ergatis saepe animalia adhiberi solent.

Si potentia ita adplicatur ad scytalas, ut sursum exerat vires, fiatque eadem ponderis & potentiae directio, machina sequetur leges, & rationem vectis homodromi, curandum maxime est, ut directio potentiae ad radium peritrochii, vel scytalam normalis sit; hinc palmulae sic in-

seruntur rotis ab aqua agitatis, ut ea perpendiculariter in illas incidat. Funes adhibeantur flexiles, ac tenues, ut ne nimium virium in superando eorum rigore absumatur. Cavendum, ne iidem gliscant supra axem, aut spiræ spiris involvantur; ex quibus sequitur, ut onus attollendum recidat, aut crassities axis, & distantia ponderis a fulcro, momentumque illius crescat; imo si funis admodum validus adhibetur, ad radium axis dimidia eius crassities computanda est, ut vera ponderis distantia obtineatur. Loco diametri per medium axem vel cylindrum transeuntis centris basium insiguntur axiculi, iique fulcrorum foraminibus, vel crenis inseruntur. Ad minuendam vero frictionem ea foramina, vel loculamenta, in quibus axiculi circumaguntur, non rotunda, sed ex tribus, quatuorve arcubus circularibus convexis constituuntur, quos aliqua tantum parte axiculi contingunt. Vis huius machinæ quodam modo infinita est, cum radius peritrochii semper augeri possit, ac tantundem decrescat potentia, quantum radius peritrochii, vel longitudo scytalæ crescit, aut contra axis gracilior fit. In usu tamen limes quidam eius incrementi est, quia ipsa scytalarum longitudo, aut vastitas peritrochii plurimum incommodi habet; hinc si datis ingenti pondere, & exigua potentia, longitudo scytalarum enormis evaderet, multiplicantur cum axibus rotæ, utque altera alteram circumagere valeat, dentibus instruuntur, vel rotæ dentatæ iungitur tympanum cum bacillis; quæ quidem in Museis Physicis passim exhiberi solent.

CAPUT IV.

De Trochleis, & Machina Funiculari.

Theoriam æquilibrii, ac genuinas statices leges vis & usus trochlearum plurimum & illustrat, & confirmat. Iisdem addimus explicationem machinæ funicularis, quæ ex iisdem derivatur principiis, & sæpe trochleis indiget.

§.

§. CXLIX.

Definitio I. Trochlea eſt rotula, vel orbiculus circa axem mobilis, cuius peripheria cava chordam, vel funem circumductum, qui *funis ductarius* dicitur, recipit. Includi eadem circa axem ſolet anſa, capſula, vel loculamento C D, in cuius extremitate D eſt uncus, ex quo vel ſuſpenditur ipſa trochlea (F.IX. T.III.) vel pondus (F.X. T.III.) Ne is orbiculus continuo motu circa axem excavetur penitus, & deteratur, firmari ad axem ſolet, ut una cum axi moveatur in ſuo locuiamento.

§. CL.

Definitio II. Trochlea *fixa* eſt, quæ ex unco, aut quovis retinaculo firmo ſuſpenditur: (F.IX.) *mobilis* vero, quæ una cum pondere ex unco ſuſpenſo movetur. (F. X.) Ut autem vis trochlearum ad principium generale æquilibrii (§. CXIX.) revocetur, ea, quæ funibus utrinque adplicantur (ſive pondera ſint, ſive quævis potentiæ) inſtar *potentiarum agentium* ſpectanda ſunt, quarum directiones ſunt tangentes circuli vel trochleæ, reſiſtentia vero, ſive tertia potentia vi compoſitæ potentiarum agentium æquipollens per centrum trochleæ tranſit. In trochlea fixa potentiæ agentes ſunt pondus O, & quævis potentia trahens in p: tertia potentia eſt in C centro trochleæ. In mobili (F. X.) potentiæ agentes ſunt retinaculum B, & potentia agens in A; tertia potentia, cuius vis æqualis & oppoſita eſt vi reliquarum, eſt in C trochleæ centro.

§. CLI.

Propoſitio. *Quotiescunque potentiæ ope trochleæ ſeu fixæ, ſeu mobilis agentes, & funi utrinque adplicatæ in æquilibrio ſunt, hæc quatuor concurrere debent:* 1. *Ut directio tertiæ potentiæ per trochleæ centrum tranſeat.* 2. *Ut potentiæ trahentes, ſeu funi utrinque adplicatæ æquales ſint,* 3. *Ut tenſiones funis ex utraque parte:* & 4. *Anguli, quos directiones potentiarum trahentium cum di-*

rectione tertiæ potentiæ efficiunt, itidem sint æquales. Demonstratur (F. XI. T. III.)

1. *Directio tertiæ potentiæ per trochleæ centrum transit.* Nam tertiæ potentiæ vices subeunt axiculi; qui, cum per centrum transeant, non potest directio tertiæ potentiæ per centrum non transire tum in trochlea fixa, tum in mobili.

2. *Potentiæ trahentes seu funi utrinque adplicatæ sunt æquales.* Nam universe potentiæ in æquilibrio constitutæ (§. CXXI.) sunt reciproce ut perpendicula ex directione tertiæ potentiæ in directiones earundem demissa, nempe in trochlea ex centro in tangentes; hæc perpendicula sunt radii trochleæ, qui æquales sunt.

3. *Funes æque tenduntur ex utraque parte*; cum enim potentiæ funi adplicatæ sint æquales, earumque vis in quovis directionis, quam habent, puncto itidem æqualis (§. CXVI. n. III.) necesse est, ut tensio funis A a sit æqualis tensioni funis B b.

4. *Anguli, quos directiones potentiarum trahentium cum directione tertiæ potentiæ efficiunt, æquales sunt.* Producantur directiones potentiarum, donec concurrant in O. Quoniam in eodem puncto etiam tertia potentia concurrit, ut æquilibrium obtineatur (§. CXX.) eiusque directio per centrum transit, erit recta C O in directione tertiæ potentiæ. Ex elementis autem recta per centrum ex concursu tangentium ducta angulum tangentium secat bifariam; quod quidem ex æqualitate triangulorum a C O, b C o facile a quovis perspicitur. Patet igitur veritas omnium membrorum propositionis; cuius inversa æque vera est, & extra dubium posita. Si enim potentiæ aut funium tensiones, vel anguli directionum cum tertia potentia sunt inæquales, vis composita potentiarum non transit per centrum trochleæ; quia unica recta, quæ nempe angulum tangentium secat bifariam, ex concursu tangentium per centrum transit; hinc directio tertiæ potentiæ, & vis composita reliquarum non sunt in eadem recta; proinde æquilibrium destrui debet.

§.

§. CLII.

Corollarium I. Vis absoluta cuiusvis potentiæ A & B est ad vim relativam, qua agunt in resistentiam C, sive qua pondus O directione OC ascendere cogunt, ut sinus totus ad cosinum anguli obliquitatis, quem directiones earundem cum directione OC resistentiæ vel ponderis efficiunt. Nam vis obliqua O a resolvitur in vim O t, & vim O e; pariter vis O b in vim O s & O e; vires O t, O s ad ascensum ponderis O nil conferunt; imo se destruunt mutuo. Igitur vis absoluta O a vel O b est ad vim relativam O e, qua pondus O ascendere cogitur, ut O a : O e, hoc est sumta O a pro sinu toto, ut sinus totus ad sinum anguli O a e, qui est cosinus anguli a O e, quem directio cuiusvis potentiæ cum directione resistentiæ, vel ponderis efficit.

§. CLIII.

Corollarium II. Si directiones potentiarum trahentium sunt parallelæ, angulus obliquitatis a O b evanescit, & cosinus sit æqualis sinui toti; ac vis relativa absolutæ. In trochlea fixa (F. IX.) si directiones funium parallelæ sunt, vis potentiæ trahentis p est æqualis vi ponderis O posito æquilibrio, ut in vecte æqualium brachiorum A C B, cuius fulcrum in C premitur vi æquali summæ potentiarum, seu ponderum p, & O. Quare trochlea fixa vires potentiæ non auget; habet tamen multa commoda 1. Ut eius ope directiones, ut libuerit, mutari possint, atque aliis potentiis pondera substitui. 2. Quia homo ægre sursum trahit, ope trochleæ fixæ directionem mutare in aliam, qua deorsum trahat, ac pondere totius corporis uti potest. 3. Ope trochleæ, ac mutatæ directionis evitatur periculum, cui trahentes subiacent, si infra pondus elevatum consistunt. 4. Trochleæ funium attritum minuunt. Quando trochlea mobilis adhibetur, funis altero extremo in B firmandus est; tum vero manifestum est, quod posito æquilibrio retinaculum B, & potentia trahens A æquales ponderis partes sustineant; quia generatim potentiæ funibus adplicatæ æquales esse debent. Si directiones

funium parallelæ ſunt; reſiſtentia centri ſive ponderis O æqualis eſt ſummæ potentiarum trahentium; quævis igitur potentia dimidiam ponderis partem ſuſtinet; & potentia p eſt ad reſiſtentiam O, ut 1 : 2. Celeritas vero potentiæ p eſt ad celeritatem ponderis O, ut 2 : 1. Dum enim pondus O uno pede aſcendit, tum funis A a, tum funis B b uno pede fit minor, ſive potentia funem 2 pedum attrahet. Ob hanc cauſſam trochlea mobilis conſideratur ut vectis ſecundi generis a C b, cuius fulcrum eſt in b, pondus in C, potentia in a; aut ſpectari poteſt trochlea mobilis, ut axis in peritrochio, quando potentia ſurſum trahit, eandemque, ac pondus, directionem habet.

§. CLIV.

Corollarium III. Ex his colligi poteſt, qua firmitate pollere retinacula debeant, ex quibus vel trochlea, vel funis pendet. Trochleæ magnitudo rationem virium non mutat; maiori tamen funis facilius advolvitur ob minorem curvitatem peripheriæ. Maxime curandum, ut directiones funium ſint parallelæ, ſive ut funis ductarius ſemiperipheriam ambiat; tum enim vis relativa potentiæ, qua effectus editur, æqualis ſit abſolutæ. Contra eo minor erit vis relativa, quo minor eſt chorda arcus, quem ambit funis ductarius; quod haud ægre demonſtrari poteſt.

Ex hisce principiis variæ trochlearum coniugationes explicandæ ſunt. Trochlea enim unica monoſpaſtos *dicitur, & quidem primi generis, ſi fixa eſt: ſecundi generis, ſi mobilis; trochlea duarum rotularum, trium, plurium* dyſpaſtos, triſpaſtos, *generatim* polyſpaſtos, *nominatur; de quibus deinceps agendum eſt.*

§. CLV.

Coniugationes Trochlearum.

I. Si funis trochleam mobilem ambiens (F. XII. T. III.) eidem in tribus punctis a, C, b adplicatur, ac directiones partium funis parallelæ ſunt, potentia agens

p

p est ad pondus O, ut 1 : 3. Nam tensio partis Bb & Aa, item tensio partis Bb, & Cc æquales sunt ac proin potentiæ funibus adplicatæ, ceu æquales concipi debent; cum igitur summa potentiarum parallelarum sit æqualis toti resistentiæ O, ac potentiæ quoque hoc casu æquales sint; erit tota resistentia ad unam potentiam p, ut 3 : 1. Sit (F. XIII.) vectis æqualium brachiorum CA, CB, & potentiæ A, & B æquales, & parallelæ; erit tertia potentia $O = A + B$. Adde aliam potentiam P agentem directione opposita directioni resistentiæ o; patet, hanc imminui quantitate æquali huic potentiæ P, eodemque tempore, si æquilibrium retineatur, imminui potentias A, & B; quare tota resistentia O dividetur per potentias A, B, P; & si istæ, ut in nostro casu, æquales sint, erit O ad A vel B, ut 3 : 1.

II. Si (F. XIV. T. III.) singulæ trochleæ mobiles habent singulos funes, quorum unum extremum retinaculo, alterum proximæ trochleæ annectitur, erit potentia trahens p ad resistentiam O, ut unitas ad illam dignitatem binarii, cuius exponens est numerus trochlearum mobilium; sive positis 3 trochleis mobilibus, erit potentia ad pondus, ut unitas ad tertiam dignitatem vel potentiam binarii, sive ut 1 : 8. Per quamvis enim trochleam mobilem potentia fit duplo minor; per duas quadruplo, per tres octuplo minor.

III. Frequentior usus est trochlearum capsis inclusarum, quarum varia coniugatio, ac structura est; aliquando enim trochleæ omnes revolvuntur circa eundem axem, vel clavum transversum in lateribus capsæ fixum; aliquando plures sunt trochlearum ordines in singulis capsis, & axibus parallelis, atque aliis supra, vel iuxta alios dispositis. Capsa una, quæ *fixa* dicitur, firmatur unco, suo in fulcro immobili, alia capsa mobilis connectitur cum pondere versus capsam fixam attollendo. In tali polyspasto lex generalis est hæc: (F. XV. T. III.) *Si funes inter se paralleli sunt, potentia p est ad resistentiam O, ut unitas ad numerum funium;* omnes enim funes si parallelæ sunt, æqualiter tenduntur, proindeque tota resistentia per singulos distribui-

tur æqualiter; nec vero potentia plus sustentare debet, quam sit tensio unius funiculi, cui adplicatur; unde perspicua est veritas legis. Dicatur numerus funium n; erit $p : O = 1 : n$; & $p = \frac{O}{n}$. Sit $O = 600$. $n = 12$; erit $p = 50$. Dici etiam potest: *Potentia est ad pondus, vel resistentiam, ut unitas ad duplum numerum trochlearum mobilium;* ac tum si extremitas funis ductarii annectitur trochleæ cum pondere mobili, ut vera ratio potentiæ ad pondus obtineatur, duplus numerus trochlearum mobilium unitate augendus est. Ut funium parallelismus servetur, rotulæ superiores ascendendo, inferiores descendendo crescunt. Si prægrandia pondera levantur, canales orbiculorum madefieri solent, ne funium attritu nimis incalescant. Ponderi adpenso addendum est pondus capsæ & uncorum. Præterea necesse est, ut trochleæ ipsæ, retinacula, funes ponderi movendo proportionati sint. Nec vero in usu trochlearum ingens earum numerus adhibetur; cum funes tam longi, & continui ægre conficiantur. Cæterum huic incommodo medetur sequens coniugatio trochlearum, quæ præ aliis vim ingentem habet.

IV. Singulis trochleis singuli funes ita adplicentur (F. XVI. T.III.) ut alterum extremum eidem resistentiæ, vel oneri O, alterum proximæ trochleæ innectatur. sola trochlea suprema A sit fixa, reliquæ B, & D mobiles; dico: erit potentia p ad onus O ut 1 : 7; in hac enim ratione inversa sunt celeritates oneris, ac potentiæ. Ascendat O uno digito; tantundem fiet longior funis A B, eodemque spatio trochlea C descendet; funis autem C D fit longior tribus digitis, nempe uno ob ascensum oneris, ac binis ob descensum trochleæ C quo ex utraque parte funis eandem ambientis digitus unus funi C D accedit. Hinc trochlea E descendet tribus digitis; at funis E p septem digitis longior evadet ob descensum trochleæ E, per quem ex utraque parte funiculi eam ambientis tres digiti longitudini E accrescunt, & unus præterea ob ascensum oneris O.

Ut adcuratius demonstretur præcedens numerus, sit pars ponderis, quam sustinet funis O A, vel A B = x;

erit

erit tensio vel pars ponderis sustentata a fune C D vel O B dimidia potentiæ tertiæ agentis secundum A B; proin $= \frac{1}{2} x$; *similiter erit tensio funis E p vel O D dimidia potentiæ C D; proin* $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} x = \frac{1}{4} x = p$, *seu potentiæ funem E p tendenti.*

2. *Cum pondus O sustentetur a tribus funibus O A, O B, O D, erit pondus* $O = x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} x$; *ac* $4 O = 7 x$; $x = \frac{4}{7} O$; *ac* $\frac{1}{7} O = \frac{1}{4} x = p$; *unde fit* $7 p = O$; *seu* $O : p = 7 : 1$.

§. CLVI.

Definitio. Chordæ , seu funiculi quotcunque idem punctum trahentes , & in æquilibrio constitutæ , machinam funicularem efficiunt. F. XVII. Pondus π chorda C π suspensum in C , quod hinc trahitur directione CB , inde directione C A , sustentabitur, si eius vis æqualis , & directio opposita est vi compositæ ex tractionibus CB , C A. Vis trahens in B exprimatur per C n , vis trahens in A per C m ; productis directionibus ultra punctum concursus C fiat H C = C n , & F C = C m ; ac completo parallelogrammo ducatur diagonalis T C , quæ est vis æquipollens in B & A trahentibus. Igitur si pondus π trahat vi æquali & opposita, æquilibrium dabitur , & reliqua obtinebunt omnia secundum leges æquilibrii ; puta 1. quod tensiones chordarum sint reciproce ut perpendicula ex quovis puncto directionis tertiæ chordæ in eas demissa. 2. Si loco potentiarum in A & B chordæ alligentur ad retinacula , quodvis urgebitur vi tanta, quanta esset potentia æquilibrans , ibidem posita. 3. Vis relativa , qua pondus π a potentiis A & B directione π C sursum urgetur, est ad vim absolutam earundem , ut cosinus anguli obliquitatis, quem directio cuiusvis potentiæ e. g. A cum directione ponderis π efficit , ad sinum totum ; resoluta enim vi C m in C o, & o m , sola vis C o in pondus π directione π C agit ; est autem sumta C m pro sinu toto recta C o cosinus anguli obliquitatis. Evanescente angulo m C o cosinus fit æqualis radio , & vis relativa absolutæ. 4. Si pondus π adplicatur intermediæ trochleæ in C ; æquilibrium non dabi-

dabitur nisi potentiæ in A & B trahentes sint æquales; ac si tum chordæ C A, C B alligentur ad retinacula, pondus π per chordam A C B tamdiu versabitur, donec versetur in medio, ubi directiones chordarum productæ cum directione ponderis π angulos utrinque æquales efficiunt. Unde colligi potest, quam generalis, quamque consentanea experientiæ sit ratio æquilibrii ex compositione, atque oppositione virium derivata.

CAPUT V.

De Plano inclinato, Cuneo, & Cochlea.

Vires relativas corporis plano inclinato impositi determinavimus Sect. II. C. VII. Nunc potentiæ cum eiusmodi corpore in æquilibrio constitutæ determinandæ sunt. Vulgo statuunt: si potentia est ad pondus corporis plano inclinato impositi, ut altitudo ad longitudinem; æquilibrium habetur. At enim hac lex minime generalis est, atque ad unicam duntaxat potentiæ directionem pertinet. Quapropter cum directiones potentiæ admodum variari possint, easdemque in usu machinarum spectare maximi momenti sit, generatim potentiæ æquilibrantes sub quavis directione examinandæ sunt. Ad planum inclinatum reduci cuneum, & cochleam, ipsa rerum istarum expositione palam fiet.

§. CLVII.

Propositio. *Ut* (F. XVIII. T. III.) *potentia π pondus O plano inclinato impositum sustentet, seu cum vi relativa ponderis O in æquilibrio sit, ea est ad hoc pondus, ut sinus anguli inclinationis plani A C B ad cosinum anguli π O S, quo directio O π potentiæ π ad planum S n vel A C inclinatur.* Dem. Ex centro O ducatur S n ad A C parallela; & vis absoluta O f resolvatur in pressivam O m, & relativam O n; quæ quidem vis relativa O n, ut in æquilibrio teneatur, impediaturque a motu, necesse est, ut a vi æquali & contraria O S sustentetur. Ducatur S π ad S n normalis, & completo parallelogrammo O S π r, recta O π exhibebit

bit potentiam π, eiusque vires absolutas secundum directionem O π, si cum pondere O est in æquilibrio. Sinus totus O f in triangulo O f n, & sinus totus O π in triangulo O π S dicatur 1. erit

1. On: Of = sin. ang. incl. A C B: 1.

2. O π: O S (O n) = 1: CoS. ang. π O S.

Quare ex æquo perturbate erit;

O π: O f = sin. ang. incl. A C B: cos. ang. π O S.

§. CLVIII.

Corollarium I. Si directio potentiæ π est parallela ad planum, angulus inclinationis π O S evanescit, adeoque cosinus eiusdem anguli fit æqualis radio vel sinui toti, estque ut O f vel longitudo plani; igitur potentia parallela π est ad pondus O, ut angulus inclinationis plani A C B ad radium, sive ut altitudo plani ad longitudinem. Si autem potentia parallela ad planum paullo maiorem rationem habeat ad pondus, quam sit ratio altitudinis ad longitudinem, eadem pondus per planum attollet; si rationem habet paullo minorem, pondus per planum tarde descendet. Atque hic est potissimus usus planorum, quæ ad horizontem inclinantur, ut pondera gravia facilius attolli ad quandam altitudinem, vel ex eadem sine magno impetu demitti possint: ope eiusmodi planorum plaustra onerantur, & levantur. Rotæ curruum in scrobe hærentes facilius extrahuntur, si anterius labrum scrobis aut fossæ declivius reddatur, inclinati suggestus tormentis bellicis, doliis, aliisque ponderibus attollendis, vel demittendis substernuntur, eodem pertinent commoda scalarum in cellis etiam subterraneis, pegmatum, tectorum &c. In eiusmodi planorum usu maxime curandum est, ut directio potentiæ sit plano parallela; hoc enim modo eiusdem vis tota in pondus impenditur; ac si idem pondus in diversis planis sustentandum est, eo minor potentia parallela sufficiet, quo minor fuerit plani altitudo, ac consequenter etiam minor vis relativa; si altitudo plani sit infinite parva, id est, si pondus in plano horizontali iacet, potentia infinite parva vi ponderis superandæ par erit; directi-

rectioni igitur horizontali ponderum non gravitas eorundem, sed inertia & frictio resistit. Contra si angulus inclinationis plani ita crescat, ut a recto non differat, vis relativa ponderis fit aequalis absolutae, & potentia ponderi sustentando aequalis esse debet.

Dum centrum O ponderis (F. XIX.) a potentia π provehitur in d, potentia descendit spatio O d $= p\ \pi$; altitudo vero perpendicularis a pondere superata, est $=$ e d; sunt igitur celeritates ac spatia a potentia & pondere confecta, ut O d: e d $=$ A C: A B sive ut longitudo ad altitudinem; quare si potentia ad pondus rationem habeat inversam, nempe ut altitudo ad longitudinem, in aequilibrio erunt.

§. CLIX.

Corollarium II. Quando potentia π agit directione π O ad horizontem parallela, eadem est ad pondus, ut altitudo plani ad basin. Nam universe est π O: O f sive π: O, ut altitudo plani ad cosinum anguli, sub quo directio potentiae π ad planum inclinatur. Hoc casu autem (F. XX. T. III.) cum sit O π parallela ad C B, & O S ad A C, erit angulus S O π aequalis angulo inclinationis plani C, & consequenter cosinus huius anguli $=$ ang. A; igitur erit potentia ad pondus, ut altitudo ad basin, eoque maior potentia requiretur, quo maior altitudo est plani, & minor basis; eo minor, quo minor altitudo, & maior basis. Hoc modo adhibentur plana inclinata instar cuneorum, dum ea subtus onera gravia immittuntur; ac tum directio potentiae trudentis est horizontalis; ac si pondus O, vel eius centrum gravitatis non nisi directione O Q moveri possit, eo tempore, quo pondus attollitur altitudine H G; potentia promovetur spatio C H; sunt igitur celeritates, ac spatia potentiae, & ponderis ut C H: H G $=$ C B: B A; sive ut basis ad altitudinem; quare si potentia ad pondus sit in ratione inversa, nempe ut altitudo ad basin, in aequilibrio erunt. Verum in hoc casu plani inclinati duplex frictio consideranda, nempe baseos plani C B ad basin corporis, supra quod illud truditur; dein ipsius plani secundum longitudinem A C cum onere attollendo.

§. CLX.

§. CLX.

Corollarium III. Ut potentia π in æquilibrio teneat vim pressivam ponderis O in planum, hoc est, ut eius pressionem in planum impediat, necesse est, ut eadem potentia sit ad pondus ut est basis, sive cosinus inclinationis plani ad sinum anguli, sub quo directio potentiæ π ad planum AC inclinatur. Nam F. XXI. T. III. ut vis pressiva, quam exhibet recta O m nullum effectum sortiatur, opus est, ut a vi directe opposita & contraria O r elidatur. Fiat π r parallela ad S n, & S π parallela ad O r. Recta O π exhibebit vim absolutam potentiæ π agentis directione O π. Est autem (§.C.II.)

$$O m \text{ seu } O r : O f = B : 1.$$
$$\& \; O \pi : O r = 1 : \text{sin. ang. } O \pi r \text{ seu ang. } \pi O S$$

$$\text{unde erit } O \pi : O f \text{ seu } \pi : O = B : \text{sin. ang. } \pi O S.$$

Si potentia π agit directione ad planum parallela, non inclinatur ad planum, sive angulus inclinationis fit infinite parvus, pariterque sinus eiusdem; hinc pondus haberet rationem infinitam ad potentiam, hoc est, potentia parallela pressionem in planum impedire non potest.

Satis iterum, & abunde colligitur ex dictis, quanti momenti sit in omni mechanica, directiones potentiarum adcurate examinare. Quamvis enim in usu machinarum calculo trigonometrico non utamur; tamen theoria cautos & circumspectos nos reddit, ut recte & commode utamur potentiis. Inclinationes directionum, vel planorum, per varia triangula lignea explorantur in datos angulos immissa, ut istorum magnitudo quaqua ratione ex nota earundem magnitudine æstimari possit, ac potentiæ, aut ponderis vires supputari.

§. CLXI.

Definitio. Cuneus, ut fere adhiberi solet, duplex est planum inclinatum, cuius basis (F. XXII. T. III.) vel dorsum aut latitudo est recta A B, altitudo vero C I, quam non nulli cunei longitudinem vocant. Usui

est

est tum in fissione corporum, ceu lignorum, tum etiam si ingentia onera ad exiguam altitudinem attollenda sunt; nam perinde est, sive onus super planum, sive planum subtus corpus promoveatur.

§. CLXII.

Observatio. Corpora firma, ceu ligna, ex fibris constant, in longum productis, aliisque brevioribus secundum latitudinem dispositis, per quas fibræ longitudinales, ut vocant, connectuntur; illæ ingenti vi elastica pollent, hæ maxime cohæsionem efficiunt, & fibrarum longiorum distractioni resistunt. Hinc cum cuneus in hiatum iam factum adigitur (F. XXII.) fibræ, quæ directione m G, & n G sunt positæ, vi sua elastica tanto magis partium separationi resistunt, quo magis tenduntur, & producuntur interposita latitudine cunei, reliquæ autem fibræ secundum latitudinem positæ vel comprimuntur in partibus m & n, vel distenduntur pariter circa I. Hæc fibrarum tensio & compressio, si solidum findendum longius est, ad certum duntaxat terminum velut ad G pertingit, ultra quem actio cunei sentitur nulla. Is terminus, ad quem actio cunei pertingit, & resistentiæ vis, quæ in usu cunei ab elasticitate & cohæsione fibrarum nascitur, a peculiari corporum plexu, & constitutione pendet. Ac concipi potest, totam resistentiam fibrarum omnium æquipollere cuidam vinculo O Q, ita, ut si actio cunei usque ad G pertingat, vis omnium fibrarum, qua partium separationi resistunt, tanta sit, quanta esset vinculi O Q eidem separationi pariter resistentis; atque ita perspicuum est, latera cunei ita agere in punctis m, & n, ac si potentia esset adplicata duplici vecti secundi generis, qui unum acutangularem efficit, ita ut fulcrum utriusque vectis sit in G, onus in O & Q, potentia in m, & n adplicata.

Quæ de fibris corporum diximus, ad omnia corpora solida tum flexibilia, tum rigida pertinent. Funis ex filis, & quodvis filum ex filamentis subtilioribus componitur, uti microscopia exhibent: ligna in fibras oblongas divelluntur, quæ ex fibrillis subtilioribus cavis constant: latera fibril-

fibrillis solidis subtilissimis nectuntur. Eodem modo lapides, metalla, chordæ, quæ ex intestinis animalium fiunt, membranæ, coria se habent. Quid est enim (inquit Musschenbroeck Introd. ad cohær. corp.) cylindrus metalli solidus, præterquam congeries filamentorum metallicorum tenuium, sibi coniunctorum?

§. CLXIII.

Propositio. *Dum potentia agit ope cunei, tum ratio plani inclinati, tum ratio vectis homodromi habenda est.* Ostend. F. XXII. T. III. dum cuneus altitudine e I intruditur, corpus eodem tempore recedit spatio m n; quare cum potentia ad resistentiam sit reciproce ut spatium confectum, ea ad resistentiam erit ut m n ad e I, vel ut A B ad C I, hoc est, ut latitudo basis cunei ad eius altitudinem; hinc quo minor est basis cunei, eo maior eiusdem vis est, uti patet in cultris, novaculis, ferris, gladiis, dentibus, securibus, forficibus, clavis, qui sunt cunei plurium laterum: in acu, quæ cuneus est laterum infinitorum; verbo, quodcunque corpus ex basi latiore in acumen desinit, rationem, ac vim cunei habet. Dicatur potentia ope cunei agens p. resistentia corporis R, basis cunei B, altitudo A; erit $p : R = B : A$. At enim etsi in corporibus findendis eadem adhibeatur potentia agens p, & idem cuneus, sive eiusdem dorsi B, & altitudinis A, non tamen æqualis reperitur resistentia; proinde R non est generatim $= \frac{pA}{B}$; hinc

2. In vi cunei determinanda præter rationem plani inclinati aliud spectandum est, nempe vectis homodromus, cuius fulcrum est in G, resistentia in O & Q, potentia p in m, & n adplicata; quapropter potentia est ad resistentiam, ut O G, vel Q G ad m G vel n G. Universe igitur potentia est ad resistentiam ut $B \times OG : A \times mG$.

Quemadmodum diversa est corporum, quæ finduntur, elasticitas, & cohæsio, & ob hanc caussam diversa resi-

resistentia; ita vis vinculi O Q diversa concipi debet in diversis corporibus. Si primus cuneus iam penitus immersus est corpori findendo, adhibeaturque novus, facilior fit distractio, eo etiam ex capite, quia distantia potentiæ in A vel B adplicatæ a fulcro G augetur. Multi Physici docent, quod particulæ aquæ in funes, vel hygrometra insinuatæ, tum particulæ liquorum solventium, corrodentium, salinorum, venenorum &c. velut totidem cuneoli sint, qui partes corporum, in quæ ingrediuntur, dissolvere debeant. At enim ostendemus, istiusmodi solutiones corporum ex solis viribus mechanicis derivari minime posse. Veteres ad diffringendos lapides in lapicidinis utebantur cuneis, quæ commodius hodie pulveris pyrii ope præstamus.

§. CLXIV.

Definitio. Cochlea seu vitis est duplex, solida seu exterior, & cava, seu interior. Solida constat ex spiris, quas *helices* vocant, cylindro circumvolutis: cava helices habet cylindro cavo incisas, quæ alterius helioes solidas in se recipiat, ita ut ambæ exacte quadrent. Cochlea solida generari concipitur ex rotatione plani inclinati super cylindrum, ita ut longitudo unius helicis vel spiræ sit longitudo plani, distantia duarum helicum altitudo, & peripheria cylindri basis. Concipiatur eiusmodi helix, quæ peripheriam cylindri semel ambit, evoluta; & facile intelligetur, eandem manere longitudinem, altitudinem, basin plani, sive id rectum sit, sive in gyrum contortum.

§. CLXV.

Propositio. *Potentia, quæ ope cochleæ agit, est ad resistentiam, ut distantia duarum helicum ad peripheriam cylindri cochleæ.* Dem. Generatim posito æquilibrio celeritas, ac spatium a potentia, & resistentia eodem tempore confectum rationem earundem reciprocam habet. Porro dum potentia, quæ in usu cochleæ semper agit directione ad basin cochleæ vel plani parallela, peripheriam cylindri sive basin semel percurrit, resistentia percurrit distantiam unius helicis ab altera; erit igitur poten-

tentia ad resistentiam reciproce ut spatium a resistentia confectum nempe ut distantia duarum helicum, ad spatium confectum a potentia sive ad peripheriam cylindri cochleæ.

Ostendimus §. *CLIX. potentiam, quæ directione ad basin plani inclinati parallela agit, esse ad pondus in ratione altitudinis ad basin plani. Cum igitur in usu cochleæ potentia agat hac eadem directione, erit ad resistentiam, ut distantia helicum, quæ est altitudo, ad peripheriam cylindri, quæ est basis plani circumvoluti; ac si pauxillum augeatur potentia, ea resistentiam superabit; crescitque eius vis, si distantia helicum decrescit, vel peripheria cylindri maior sit. Eadem plurimum iuvatur, si capiti cylindri inseritur vectis; tum enim eodem tempore, quo resistentia per distantiam binarum helicum movetur, potentia peripheriam circuli maioris describit; & cylinder cochleæ cum eiusmodi vecte fit quodammodo axis in peritrochio. Adplicatio cochleæ varia est; aliquando intra cavam, quæ etiam matrix dicitur, immobilem, solida, seu mas movetur: aliquando per marem quiescentem matrix volvitur. Attritus tamen ingens est, de quo in determinanda ratione potentiæ & resistentiæ præscindi debet. Servit cochlea potissimum pressioni, prælis vinariis, sigillatoriis, typographicis, monetariis &c. per eandem citra percussionem firmiter connectuntur metalla, ligna. Terebræ quoque perforandis corporibus inventæ cochleas æmulantur.*

CAPUT VI.

De Machinis Compositis.

Machinarum compositarum maxima est varietas, & multitudo; neque nostrum est, minutim omnia exequi, cum ex generalibus principiis, & legibus machinarum casus particulares pendeant. De polyspastis trochlearibus, etsi ad machinas compositas pertineant, iam supra egi, cum opportunus se locus offerret. Cuneum ad machinas compositas quadam ratione referri debere, ex dictis constat.

Nunc de vectibus, compositis, ac rotis dentatis maxime agendum est.

§. CLXVI.

Definitio. *Machina composita* est compages, vel combinatio plurium simplicium machinarum, quae ad effectum quemdam praestandum iunguntur; dicique potest *homogenea*, quando ex pluribus eiusdem speciei coalescit: *heterogenea*, si ex combinatione machinarum speciei diversae fit. Ratio compositionis fere in eo consistit, ut potentia in machina illa, cui onus, vel resistentia adplicata est, consideretur respectu proximae machinae instar oneris, pro quo alia potentia quaeritur; quae inventa relate ad aliam machinam partialem denuo instar oneris sumitur, atque ita deinceps, donec in ultima partiali machina denique vera potentia adplicetur.

§. CLXVII.

Propositio. *Dum potentia agit ope machinae compositae ex pluribus simplicibus in se invicem agentibus, ea est ad onus, vel resistentiam in ratione composita ex rationibus omnibus, quae in machinis simplicibus compositam constituentibus obtinent.* *Dem.* Sint tres vectes heterodromi (F. XXIII. T. III.) A B, B C, C D. Onus in O; fulcra in l, m, n; potentia p in D. Concipiatur potentia quaedam fictitia in B, quae cum O tueretur aequilibrium, eaque sit E; tum alia in C, quae cum potentia priore fictitia in E adplicata aequilibrium sustineret; eaque sit = e. erit

1. O : E = B l : A l.
2. E : e = C m : B m.
3. e : p = D n : C n.

Unde compositis rationibus, factaque primae rationis divisione per E e, erit

$$O : p = Bl \times Cm \times Dn : Al \times Bm \times Cn.$$

Ponatur $Bl = Cm = Dn = 5$; & $Al = Bm = Cn = 1$. erit $O : p = 125 : 1$.

§.

§. CLXVIII.

Corollarium. Inter vectes compositos maxime celebratur statera composita (F. XXIV. T. III.) tormentis bellicis, anchoris gravissimis, campanis, aliisque oneribus prægrandibus levandis & ponderandis serviens. Sit enim A C vectis secundi generis; onus in B, fulcrum in A; in C concipiatur potentia fictitia E, quæ ope vinculi C D adplicetur instar oneris ad stateram F D, quæ est vectis primi generis; sit p cursor, seu vera potentia, 1 fulcrum.

erit $O : p = CA \times F1 : AB \times D1$

ponatur $CA = 6.\ AB = 2.\ F1 = 5.\ D1 = 1.$

erit $O : p = 30 : 2 = 15 : 1.$

§. CLXIX.

Definitio. *Machina rotata* dicitur, quæ vel tota vel ex parte componitur rotis inter se coniunctis. Rota *stellata* est, quando dentes ex peripheria eiusdem instar radiorum extant: *pectinata*, si dentes plano rotæ infiguntur, idque planum situm verticalem habet: *coronata*, si dentes plano rotae infixæ verticaliter prominent. In eiusmodi machina singulæ rotæ firmantur in suis axibus, vel in cylindro, qui circa axiculos minores cylindri basibus utrinque infixos volvitur. Eidem cylindro circa eundem axem inseritur tympanum, vel ipsa cylindri superficies ad æqualia intervalla incisis crenis dentata est, vel denique axi inseritur curriculum, id est, tigilli, aut paxilli, qui inter se paralleli sunt, & disco circulari infiguntur. Eiusmodi curriculum sæpe *laterna* nuncupatur. Generatim in machina rotata distinguenda est rota a suo tympano; ac si machina cietur ad motum, vel tympanum rotam circumagit, vel rota tympanum; motus enim a rota ad tympanum, vel a tympano ad rotam propagari potest. Ea pars machinæ, cui potentia motrix adplicatur, fere est tympanum recurvo manubrio versatile; dentes huius tympani dentibus primæ rotæ inserti eandem una cum

 alio

alio tympano circumagunt, & dum huic tympano inferuntur dentes secundæ rotæ, etiam hæc cum suo itidem tympano, vel cum cylindro, cui pondus per funem est adplicatum, circumagi debet; quo quidem modo a potentia ad pondus per plures machinas simplices propagatur motus.

§. CLXX.

Propositio. *Potentia p manubrio R versans rotatam machinam (F. XXV. T. III.) est ad onus movendum O, ut factum ex radiis tympanorum & radio cylindri Q, cui onus adplicatum est, ad factum ex radiis omnium rotarum, & manubrii.* Dem. Manubrium R cum suo tympano A eidem axi inserto, ac dein rota r cum suo itidem tympano *a*, ac denique rota ϱ cum radio a cylindri Q sunt totidem axes in peritrochio; in quibus potentia ad onus, vel resistentiam semper est ut radius axis vel tympani ad radium rotæ vel manubrii, fiat igitur secundum hanc legem analogia: ut radius A tympani primi ad radium manubrii R; ita potentia p manubrium versans ad effectum, quem illa ope manubrii obtinet; qui quidem effectus adplicatur rotæ r. Ponatur is = E, ac fiat eodem modo: ut radius tympani *a* ad radium rotæ r, ita effectus E seu vis huic rotæ adplicata ad effectum, qui per tympanum *a* obtinetur. Dicatur is e, fiatque ut radius a axis vel cylindri ad radium rotæ ϱ; ita effectus, seu vis e huic rotæ adplicata ad onus O. Quapropter sequentes habentur analogiæ:

$$A : R = p : E.$$
$$a : r = E : e.$$
$$a : \varrho = e : O.$$

Unde compositis rationibus est $A\, a\, a : R\, r\, \varrho = p\, E\, e : E\, e\, O = p : O.$

§. CLXXI.

Corollarium I. Quo minora sunt tympana relate ad rotas, aut quo maior ponitur rotarum numerus; tan-

tanto maius obtinetur incrementum virium. Ponatur $R = 28''$. $r = 20''$. $\varrho = 15$. $A = 7''$. $\alpha = 5$. $a = 3$. Sitque $O = 5000$, invenietur potentia $p = 62\frac{1}{2}$. Si vero ponitur $R = 10$. $r = 12$. $\varrho = 15$. $A = 2$. $\alpha = 3$. $a = 3$. $p = 50$; erit $O = 5000$. Sit denique $R = 15$. $r = 18$. $\varrho = 20$. $A = 1$. $\alpha = 1\frac{1}{2}$. $a = 2$. $p = 50$; erit $O = 9000$.

§. CLXXII.

Corollarium II. Si pro radiis tympanorum, & pro radio cylindri, cui onus adhibetur, assumitur unitas, deturque pondus & potentia, inveniri potest numerus rotarum computato, siquod est in machina, manubrio, & præterea ratio cuiusvis radii rotæ, ad radios tympanorum, & cylindri. Dicatur numerus rotarum x; erit

$$p : O = 1 : x = \frac{O}{p}.$$

Pondus datum O dividatur per datam potentiam p, & quotus distribuatur in factores; erunt hi tot radii rotarum, quot factores sunt assumti. Sit $O = 5000$. $p = 50$; erit $\frac{O}{p} = 100. = 4 \cdot 5 \cdot 5$. Tres igitur rotæ assumendæ sunt, ita, ut ratio unius radii ad tympanum sit 4 ; 1. Ratio reliquarum binarum sit 5 : 1.

§. CLXXIII.

Corollarium III. Ex ipsa constructione machinæ rotatæ liquet, quamvis rotam, ac tympanum eidem axi insertum integram revolutionem eodem tempore absolvere. At si revolutiones tympani unius comparantur cum revolutionibus rotæ a tympano motæ haud ægre intelligitur numerus revolutionum tympani ac rotæ esse reciproce ut est numerus dentium rotæ ad numerum dentium tympani. Sic numerus revolutionum manubrii R est ad numerum revolutionum rotæ r reciproce ut numerus dentium huius rotæ r ad numerum denti-

 um

um tympani A manubrio respondentis; nam eodem tempore, quo manubrium semel circumvolvitur, unam etiam revolutionem absolvit tympanum A; verum rota r, cuius dentes tympano A inferuntur, eo minorem revolutionis partem illo tempore peraget, quo numerus dentium in rota r maior fuerit, quam numerus dentium tympani A; consequenter eo plures dabuntur revolutiones manubrii & tympani A, quam rotæ r, quo in hac maior extiterit numerus dentium, quam in tympano A. Universe igitur numerus revolutionum rotæ, vel tympani cuiuscunque m est ad numerum revolutionum tympani vel rotæ n, quæ ab m movetur, reciproce ut numerus dentium tympani vel rotæ n ad numerum dentium rotæ, vel tympani m. Et quoniam ob dentium æqualitatem numeri eorundem sunt ut peripheriæ rotarum, vel ut radii, idcirco rationi numerorum dentium substitui potest ratio circumferentiarum, vel radiorum. Ex quibus illud denique elegantissimum corollarium derivatur: *numerus revolutionum rotæ velocissimæ est ad numerum revolutionum rotæ tardissimæ, ut factum ex radiis rotarum ad factum ex radiis tympanorum.* Sint (F. XXVI. T. III.) tres rotæ R, r, ϱ; numerus dentium in R = 120. in r = 100. in ϱ = 60. Sintque tria tympana A, *a*, a; numerus dentium idem in omnibus, & = 10. Præterea sit N numerus revolutionum rotæ R; n numerus revolutionum tympani A, & rotæ r; ν numerus revolutionum tympani *a* & rotæ ϱ. x numerus revolutionum tympani a, & rotæ velocissimæ q; fiet secundum dicta

$$1.\quad N : n = A : R.$$

$$2.\quad n : \nu = a : r$$

$$3.\quad \nu : x = a : \varrho$$

Compositis rationibus, factaque primæ rationis divisione per n ν fiet

$$N : x = A\,a\,a : R\,r\,\varrho = 10.\,10.\,10 : 120.\,100.\,60 = 1 : 720.$$

Hoc est, dum rota R unicam revolutionem absolvit, tympanum a & rota q peraget revolutiones 720; & si una revolutio rotæ R absolvitur intra 12 horas; ro-

rota q intra id tempus revolvetur, singulis minutis primis horariis; nam 12. 60 = 720. Si igitur numerus revolutionum N rotæ tardissimæ ponitur = 1. erit

$$1 : x = A\,a\,a : R\,r\,\varrho\,;\ \&\ x = \frac{R\,r\,\varrho}{A\,a\,a};$$ hoc est,

si factum ex radiis rotarum dividitur per factum ex radiis tympanorum, quotus ostendit, quoties rota velocissima circumeat, donec tardissima unam revolutionem absolvit.

Machinas ex variis rotis dentatis compositas, quarum ultima fere ope manubrii vertitur, vel adiunctam habet cochleam infinitam, Pancratia *adpellant; quasi omnia per eas effici, ac moveri possint. Compositio machinarum frequentissima est ex axe in peritrochio, & trochleis, quod quidem genus, si rostrum longe eminens habeat,* grus *adpellatur. Ad machinas compositas cochlea Archimedis, ab Archimede scilicet inventa, referenda est; constat ex cylindro, cui circumvolvitur tubus plumbeus instar spirarum, quæ sunt in cochlea, inservitque aquis ex imo in sublimiorem locum attollendis. Quidam ad machinas compositas etiam bina plana ita coniuncta referunt, ut pondera filo per trochleam transeunte connexa in se mutuo agere, seseque tenere in æquilibrio possint. Sint (F.XXVII.T.III.) eiusmodi planis imposita corpora Q & P, quorum massæ sint Q, & P; vires relativæ acceleratrices q, & p. Longitudo A C sit = L; longitudo A B = l. Perspicuum est, ut hæc corpora in æquilibrio sint, vires earundem æquales esse debere; sunt autem hæ vires ut factum ex massa in vim acceleratricem; adeoque erit Q q = P p. Porro vires acceleratrices corporum planis impositorum, si altitudo plani utrinque eadem est, sunt reciproce ut longitudines planorum (§. CV.) adeoque erit p : q = L : l; & ob Q q = P p; Q : P = p : q; proinde Q : P = L : l. Hoc est,* ea corpora in æquilibrio erunt, si massæ sint directe, ut longitudines planorum.

CAPUT VII.

De Resistentia, & Firmitate Absoluta Corporum Solidorum.

De illa Mechanices parte, quæ potentias motrices revocat ad certas regulas, plurimi Philosophi ac Mathematici, Antiqui & Recentiores tractarunt; hanc alteram eiusdem partem, quæ resistentias, & firmitates corporum examinat, plerique omnes reliquere intactam. Hæc tamen res in omni Mechanices usu plurimum commodi habet, & ex virium oppositione, & staticės legibus maxime pendet. Non cohærentiæ caussas, sed quantitatem investigamus hoc loco, & ad calculum referre, certe quidem perutiles de ea regulas exponere conamur.

§. CLXXIV.

Definitio. Resistentia, & firmitas corporum est ea illorum vis, qua rupturæ, & partium separationi, cum trahuntur, aut premuntur, resistunt. Et quoniam corpora solida ex fibris in longum productis constant, quas aliæ fibrillæ transversæ inter se nectunt; (§. CLXII.) idcirco *resistentia & firmitas absoluta* dicitur, qua potentiæ secundum longitudinem fibrarum agenti resistunt: *resistentia respectiva*, qua resistunt potentiæ directione ad fibras normali agenti. Inter has potentiarum directiones, quarum altera est normalis, infinitæ directiones obliquæ concipi, sed quæ in parallelam unam, normalem alteram resolvendæ sunt.

Si (F.I. T.IV.) pertica vel chorda A B secundum longitudinem fibrarum suspensa, vel in A fixa trahitur a potentia vel pondere P; aut si trabes verticaliter erectæ imposita mole gravantur, eique vi resistunt; hæc absoluta est eorum corporum resistentia. Si autem corpus oblongum A C D fixum in C D, aut infixum muro trahitur directione A B ad longitudinem eiusdem normali, resistentia est respectiva; F. II. T. IV.

§. CLXXV.

Definitio II. *Potentiæ rumpentes* sunt, per quas fit ruptura, aut diffractio corporum; vires, quas trahendo,

do, vel premendo exerunt, recte *vires in nexum* nuncupantur. Utimur autem maxime ponderibus potentiarum loco, & vocamus pondus *maximum*, per quod proxime fit diffractio, vel ruptura, & quo notabiliter imminuto diffractio non fieret.

§. CLXXVI.

Hypothesis. Concipiatur (F. I. T. IV.) corpus oblongum A B eiusdem per totam longitudinem crassitiei, ceu chorda, filum metallicum, regula lignea, cylinder quicunque, vel parallelopipedum verticaliter in A figi, aut suspendi; sitque id corpus primo liberum ab omni pondere, seu vi trahente, præterquam propriæ gravitatis: tum ponatur etiam secundum fibras oblongas trahi; vera erunt sequentia:

I. *Vis in nexum supremum A, quæ a propria gravitate partium oritur, est ut pondus individuale eiusdem corporis.* Singulæ enim particulæ sive sectiones corporis sunt graves, seque habent ut pondusculа adpensa. Quare vis in singulos nexus ab infimo B usque ad supremum A crescit progressione naturali numerorum 1, 2, 3, 4 &c. ac vis in supremum nexum erit ut terminus ultimus progressionis, sive ut numerus singulorum pondusculorum, qui efficit pondus individuale dati corporis.

II. *Vis in nexum singularum particularum, quæ a pondere adpenso oritur, per singulas partes ab infimo nexu B ad supremum A æqualis est.* Nam pondus vim suam proxime exerit in obstaculum sui motus, nempe particulam B. Eadem igitur vi, quam pondus exerit, urgetur nexus inter primam B, & secundam particulam; porro secunda eadem vi, qua trahitur, trahit tertiam, tertia quartam; secus si minor alicubi vis esset, pondus non sustineretur. Igitur vis in nexum, qui inter binas quasque particulas intercedit, semper æqualis est

III. *Resistentia absoluta dati corporis æqualis est summæ virium in nexum, quæ tum a propria gravitate inferiorum, tum a pondere maximo oriuntur.* Nam quamdiu

diu corpus tum proprio ponderi, tum adiectitio P ferendo par est, inter vires in nexum ab iis ponderibus ortas, & resistentiam, vel cohærentiam corporis æquilibrium habetur. ob æqualitatem actionis, & reactionis; quoniam autem firmitas corporum non est infinita, usque adeo augeri potest vel proprium pondus corporis aucto eius volumine, vel adiectitium P, vel utrumque, ut sit proximum diffractioni. Patet igitur veram resistentiæ mensuram esse summam ponderis proprii, & adiectitii ponderis maximi, per quod divulsioni partium proximum sit.

IV. *Relate ad pondus adiectitium spectanda est crassities corporis, non longitudo: relate ad proprium pondus longitudo spectanda est, non crassities.* Nam quia vis adiectitii ponderis P per singulas fibras æqualiter distribuitur, erit vis in nexum particularum, quæ ab illo pondere oritur, in singulis fibris tanto minor, quo maior est numerus fibrarum, seu maior crassities, eo fere modo, quo in polyspasto trochleari vis totius oneris per singulos funiculos æqualiter dividitur, aut quo vis corporibus impressa per singula elementa eorundem ita distribuitur, ut, quo maior est eorundem numerus, eo minor generetur velocitas. Igitur numerus fibrarum, quæ secundum latitudinem dispositæ sunt, & crassitiem corporum efficiunt, spectandus est: longitudo vero relate ad pondus adiectitium nihil mutat, quia per singulas sectiones æqualem vim in nexum exerit. At vero relate ad propriam gravitatem nil confert crassities; ea enim crescente ipsa gravitas propria tantundem crescit. Fieri autem potest, ut ita augeatur longitudo, ut corpus proprio ponderi succumbat.

Nonnullos Philosophos, qui fila, & funes longiores magis resistere opinabantur, quam breviores, ipse iam Galilæus refutavit in Dial. Mech. 2. Musschenbroeck in Introd. ad cohærent. corp. ait: " Tentamina plurima feci „ cum fidibus metallicis clavicymbalo inservientibus, quæ „ sive longæ, sive breves fuerint, idem pondus gestave„ runt, funes, filave contorta raro in longissimo tractu „ æque crassa, & proinde æque fortia fieri possunt; hinc „ experimenta cum iis instituta adeo mire variant. „ Conf.

§.

§. *CXVIII. n. III. in horologiis pondera ex funiculis suspensa æque in rotas agunt, sive iidem longiores, sive breviores fiant.*

§. CLXXVII.

Corollarium I. Quia resistentia absoluta in corporibus homogeneis est ut crassities; hinc si illa captis experimentis in singulis corporum generibus explorata est, inveniri eadem sub data quavis crassitie poterit. E. g. cognita resistentia unius filamenti tenuis, invenitur resistentia funis utcunque crassi ex filamentis similibus sibi parallelis, & non intortis compositi, ita cum filum lini crassitiei setæ equinæ sustineat $3\frac{1}{2}$ tt, funis ex his filis confectus, & 7000*ies* crassior sustinebit libras $7000 \times 3\frac{1}{2}$, atque eiusmodi funis ex 7000 filis non intortis confectus crassitiem pollicis cylindrici proxime efficit. Ponatur nunc ista crassities $= 1$. & fiat funis anchorarius, cuius diameter efficit quinque pollices; erit crassities funis anchorarii ut quadratum diametri, ac pondus, quod sustinebit, $= 7000 \times 25 \times 3\frac{1}{2}$. Ex quo intelligitur, eiusmodi funibus haud ægre naves sustineri posse, etsi a procellosis fluctibus agitentur. In quolibet igitur corporum genere experimentum de resistentia absoluta desideratur, indagando pondus maximum, quod ab assumto corpore notæ crassitiei sustinetur. Eiusmodi experimenta Cel. Musschenbroeckius in dissertationibus complura adcuratissime recenset; unde non nulla hoc loco exponemus.

§. CLXXVIII.

Observatio de Resistentia Absoluta.

I. Ligna parallelopipeda, quorum quodvis latus erat 0, 27. poll. Rhenol. Rupta fuerunt a sequentibus ponderibus:

Lignum

Lignum	Tiliæ	a ℔	1000
	Abietis	—	600.
	Alni	—	1000
	Quercus	—	1150.
	Ulmi	— —	950
	Fagi	— —	1250
	Fraxini	—	1250
	Piceæ	— —	550.

II. Fila metallica cylindrica diametri, 0.1 pollicis Rhenol. ab appensis sequentibus ponderibus fuerunt rupta.

Filum ex	Cupro rubro	a ℔	299. 25
ex	Orichalco	— —	360.
ex	Auro	— —	500.
ex	Stanno		40, 25
ex	Plumbo	— —	29, 25.
ex	Argento	— —	370.
ex	Ferro	— —	450

III. Cylinder vitreus ex purissimo, albissimoque vitro, cuius diameter, ubi maxime gracilis erat, & ubi ruptum est vitrum, fuit 0, 23 pollic. sustinuit libras 118, alius ex eodem vitro libras 150.

IV. Filum unum serici e glomere paulo ante evoluti observante Musschenbroeckio tulit 80 grana medica, aliquando 85, aliquando 90. Similiter testatur Reaumur, unum eiusmodi filum bombycis tulisse drachmam, aliud etiam sesqui drachmam; habet autem drachma medicum 3 scrupulos; scrupulus 20 grana. 57 eiusmodi fila tulerunt grana 4845, proinde unum tulit grana 85. Singula tantæ subtilitatis erant, ut 57 fila simul sumta efficerent crassitiem humano pilo æqualem. Pilus e capite hominis sani & iuvenis evulsus tulit grana 2069. De Lanis ait, capillum sui capitis tulisse 1200 grana: aliud grana 1920; eam discrepantiam ab ætate, crassitie pilorum, imo etiam cultura derivant. Septem eiusmodi capilli formabant crassitiem setæ equinæ parem, ac tulerunt 9635 gr. Seta autem equina duntaxat 7970, vel 7920. Tela araneæ maioris per microscopium observata talis crassitiei est, ut 16 eiusmodi filamenta in fasciculum

lum collecta forment crassitiem pili humani. Is fasciculus tulit grana 2400; igitur singulæ telæ grana 150. Lini mediocriter subtilis, neque ulla arte ante tractati, quam ut neri possit, filamenta 23 parum intorta formabant filum æque crassum, ac seta equina; ac simul tulerunt 11710 gr. aucto pondere frangebantur.

Etsi spectata theoria resistentiæ corporum homogeneorum sint in ratione basium; tamen si alterius diametri, ac basis fila adsumuntur, quam in captis experimentis; ratio ponderum, quæ sustinent, ac basium non adcurate respondet tum ob varias corporum etiam homogeneorum affectiones, tum ob eam caussam, quod corpora, quæ adpensis ponderibus trahuntur, paulatim attenuentur, atque aliam crassitiem acquirant. Nec vero id inutilem theoriam reddit; cum in usu filorum, perticarum, trabium &c. semper paullo maior sumi crassitudo queat, quam ratio ponderis sustinendi poscat. Percommodum etiam est in omni Architectura civili, ut propinqua quadam ratione determinari possit crassities, ac firmitas trabium, aliorumve sustentaculorum, quæ ad extruendas ædes, ianuarum postes, tabulationes, contignationes destinantur, ut spectato onere, quod ferre coguntur ea fulcra, tum ruinæ ac rupturæ periculum, tum inutilis vastitas, atque enormitas evitetur. Multa ad Philosophiam experimentalem pertinentia institutis de cohærentia absoluta experimentis observavit sagacissimus Musschenbroeckius, & de omni re Physica optime meritus; ac 1. Aurum adpenso pondere minus attenuari, ac prolongari, quam cuprum vel orichalcum; forte quia magis compactum est, nec tot poris pertusum, ac alia metalla; certe & ligna densiora præ aliis magis firma reperiuntur; quamquam densitas pro generali lege cohærentiæ statui non potest; secus plumbum, uti densitate, sic & vi cohærentiæ proxime sequeretur aurum; atqui illud omnium metallorum maxime imbecille est. 2. A cupro minus ponderis ferri, quam ab argento; constat nihilominus, si idem argento misceatur, augeri cohærentiam. 3. Fila metallica, dum appenso onere trahuntur, & attenuantur, insignem calorem concipere, qui ab attritu partium compressarum oritur.

§.

§. CLXXIX.

Corollarium II. Quoniam in supremum nexum, ubi corpora suspenduntur, præter adiectitium pondus tota vis gravitatis propriæ corporum agit; hinc si nexus partium æqualis ponitur, diffractio in suprema parte continget; id quod experientia in funibus, ac filis longis comprobat. Fieri etiam potest, ut corpus proprio pondere frangatur, si ita eius longitudo augeatur, ut vis propriæ gravitatis ponderi maximo æqualis fiat; & quoniam crassities spectato proprio pondere nullum momentum habet; idcirco corpora homogenea, quæ proprio pondere rumpuntur, eiusdem longitudinis sunt, etsi crassitie differant.

CAPUT VIII.

De Resistentia Respectiva Corporum Solidorum.

Leges resistentiæ respectivæ ex theoria æquilibrii in vecte maxime derivantur: quæritur autem primo ea resistentia in figuris planis: tum ad corpora solida, quæ eiusdem per totam longitudinem crassitiei sunt, fit adplicatio.

§. CLXXX.

Hypothesis. Sit planum quodcunque expers crassitiei, sed gravitate præditum, e. g. (F. II. T. IV.) parallelogrammum A B C D, secundum lineam B D parallelum horizonti, & secundum A B normale, quod immobiliter sustentetur in C D, aut infixum sit corpori G; quoniam eius gravitas perinde se habet, ac si in centro gravitatis esset appensum pondus P æquipollens ponderi totius gravitatis: concipi potest, dimidium eius ponderis suspendi in dupla distantia nempe in B. Sit igitur in B pondus E æquale dimidio ponderi parallelogrammi; tum aliud pondus Q maximum, quod vis cohærentiæ ferre potest, donec diffractio proxime contingat. Erunt

pon-

pondera E & Q potentiæ rumpentes. His positis vera sunt sequentia.

I. *Si pars prominens C D A B cum parte sustentata I K duntaxat esset connexa in supremo puncto C, resistentia respectiva, seu cohærentia illius nexus, uti ea instar potentiæ spectatur, æqualis est facto ex summâ ponderum $E + Q$ in longitudinem parallelogrammi D B, quam dico L, divisô per altitudinem eiusdem A.* Nam resistentia respectiva eodem modo se habet, ac momentum potentiæ in C adplicatæ se habet posito vecte rectangulari C D B (§. CXXV. n. I.) si enim in C ponitur potentia p, & altitudo C D parallelogrammi dicitur A;

erit $A\,p = \overline{E + Q} \times L$; & $p = \dfrac{\overline{E + Q} \times L}{A}$.

II. *Si pars prominens C D A B cum parte sustentata per totam altitudinem C D connexa est, vis cohærentiæ in suprema parte C minor requiritur, quam si ea sola resisteret.* (§. CXXV. n. I.) Nihilominus tota resistentia respectiva semper æquatur facto ex ponderibus $E + Q$ in longitudinem D B; quod ex theoria æquilibrii perspicuum est.

III. *Si pars prominens parallelogrammi cum parte sustentata per totam altitudinem C D connexa est, resistentia respectiva supremi nexus in C æqualis est facto ex potentiis rumpentibus in earum a fulcro distantiam divisô per tertiam partem Quadrati altitudinis*; sive si resistentia supremi nexus dicitur U; erit $U = \dfrac{\overline{E + Q} \times L}{\frac{1}{3} A^2}$.

1. Etsi cohærentia omnium partium per totam altitudinem æqualis sit; tamen vis, qua singulæ partes urgentur, crescit ab infimo puncto D usque ad supremum C; ita, ut si partes seu fibræ oblongæ tenderentur, tensio supremæ fibræ esset C m; & tensio fibræ cuiusdam intermediæ, ut O n; ac quocunque magno, aut parvo intervallo partes per altitudinem dispositæ cede-

rent, necessario superiores maiore celeritate, maioreque spatio, quam inferiores cedere cogerentur pro maiore distantia a puncto D, circa quod, si diffractio contingit, parallelogrammum convertitur. Cum igitur huic tensioni aut vi, qua fit tensio, sit æqualis resistentia, sequitur, ut hæc ab infimo puncto D ad supremum C crescat ordine naturali numerorum 1, 2, 3, 4 &c. eritque summa omnium resistentiarum, quam adpello S, ad resistentiam supremi nexus seu ad u, ut triangulum C D m ad basin C m; & quia C D $=$ A, & basis C m $=$ u; erit triangulum seu dimidium factum ex altitudine in basin, $= \frac{A\,u}{2}$; consequenter

$$S : u = \frac{A\,u}{2} : u = A : 2.$$

2. Quoniam hæ resistentiæ ab infimo puncto crescentes instar potentiarum eodem modo crescentium spectari possunt; earum omnium commune centrum gravitatis o, uti in triangulo (§.CXXXIII. n. III.) a vertice D distat binis partibus tertiis altitudinis, seu $\frac{2}{3}$ A. Ac si in centro gravitatis O summa omnium resistentiarum concipitur collecta, earum momentum erit

$$S \times \tfrac{2}{3} A = \frac{A\,u}{2} \times \tfrac{2}{3} A = \frac{A^2\,u}{3}.$$

3. Quoniam parallelogrammum a pondere maximo Q redactum est ad statum divulsioni proximum; erit tota resistentia respectiva cum potentiis rumpentibus in æquilibrio, & momenta utrinque æqualia, seu

$$\frac{A^2\,u}{3} = \overline{E + Q} \times L; \text{ unde fit } u = \frac{\overline{E + Q} \times L}{\tfrac{1}{3} A^2}.$$

Hæc instar porismatum præmisi, ex quibus leges resistentiarum deinceps fluent. Resistentia respectiva in supremo nexu C potissimum quæritur, quia ea, utpote maxime distans a fulcro D maximum momentum adversus potentias rumpentes habet; & siqua ruptura fieret, ea

primo

primo circa supremum nexum C contingeret, quo dissoluto diffractio reliquarum partium & rotatio parallelogrammi circa angulum D consequeretur. Sed iam ad parallelopipeda transeundum est.

§. CLXXXI.

Propositio. *Resistentiæ respectivæ in parallelopipedis sunt in ratione composita ex directa potentiarum rumpentium, ac distantiarum, seu longitudinum, & reciproca duplicata altitudinum, & simplice latitudinum.* Ostend. Pondus appensum Q vires suas per omnes supremos nexus secundum latitudinem dispositos ita diffundere debet, ut si latitudo in dupla, tripla, vel quacunque multiplicium ratione crescat, vicissim vis ad diffractionem urgens in eadem ratione decrescat; quare resistentia respectiva ponderi opposita, est reciproce ut latitudo parallelopipedi. Si vero spectatur propria eiusdem gravitas seu E, ea cæteris manentibus tantundem crescit, quantum crescit ipsa latitudo, quam dico B; quare dum factor E exprimens dimidium pondus parallelopipedi auget factum $\overline{E + Q} \times L$, vicissim divisor B exprimens rationem reciprocam latitudinis tantundem illud minuit; quocirca cum resistentia ratione altitudinis sit in singulis parallelogrammis, seu u sit

$$= \frac{\overline{E + Q} \times L}{\frac{1}{3} A^2};$$ eaque tantundem decrescat, quo plura concipiuntur parallelogramma coniuncta, sive quo maior est latitudo; erit in parallelopipedo resistentia respectiva supremi nexus $= \frac{E + \overline{Q \times L}}{\frac{1}{3} A^2 B}$; & si ponitur aliud parallelopipedum, aliaque prioribus homologa, erit ob quantitatem $\frac{1}{3}$ constantem,

$$V : u = \frac{\overline{E + Q} \times L}{A^2 B} : \frac{\overline{e + q} \times l}{a^2 b}.$$

Et quoniam potentiæ rumpenti semper adnumeran-

dum est proprium pondus corporum, ponatur id pondere maximo Q iam contineri, vel ab eo præscindi, ut formulæ simpliciores evadant, erit V: $u = \frac{Q\ L}{A^2\ B} : \frac{q\ l}{a^2\ b}$.

§. CLXXXII.

Corollarium I. *In corporibus homogeneis potentiæ rumpentes directione normali adplicatæ sunt in ratione composita ex directa duplicata altitudinum, & latitudinum & reciproca longitudinum.* Nam in corporibus homogeneis resistentia respectiva fibrarum. uti ea instar potentiæ ponderi maximo obnitentis consideratur, eadem est, & constans; hinc erit in superiore analogia $V = u$;

$$\& \frac{Q\ L}{A^2\ B} = \frac{q\ l}{a^2\ b}.$$

Unde fit $QL : ql = A^2 B : a^2 b$

$$\& \qquad Q : q = \frac{A^2\ B}{L} : \frac{a^2\ b}{l}.$$

Ex hac iam formula $Q = \frac{A^2\ B}{L}$, cæteræ leges, quas Mechanici operose demonstrant, per sese prona methodo fluunt.

§. CLXXXIII.

Corollarium II. *Si sint bina parallelopipeda eiusdem materiæ & crassitiei, sed diversæ longitudinis, erunt potentiæ rumpentes normaliter adplicatæ reciproce ut longitudines*; nam $Q = \frac{A^2\ B}{L}$; & in hac hyp. $A^2 B = 1$; igitur $Q = \frac{1}{L}$. Eodem modo deducuntur reliqua, si omnes comparationis termini uno excepto, constantes ponuntur; uti si sola latitudo in datis corporibus homogeneis diversa est, erunt potentiæ rumpentes directe ut latitudines corporum; quod ab experientia compro-

ba-

batum reperit Muschenbrœckius in binis parallelopipedis quercinis, quorum altitudo erat o, 33 poll. longitudo 9 dig. alterum, cuius latitudo erat o, 26 pollic. tulit libras; alterum duplæ latitudinis duplum pondus seu 10 tt. sustinuit.

§. CLXXXIV.

Corollarium III. *Si ratio solius gravitatis propriæ habetur ac solidum grave eiusdem per totam longitudinem crassitiei muro infigitur ita, ut eius longitudo sit horizonti parallela, & altitudo adeum normalis, vires ad diffractionem urgentes sunt in ratione composita ex directa duplicata longitudinum, & simplice gravitatum specificarum, ac reciproca altitudinum.* Nam si ratio solius gravitatis propriæ habetur & ponitur $Q = o$; valor resistentiæ respectivæ (§. CLXXXI.) abit in hunc: $u = \frac{E\,L}{\frac{1}{3}\,A^2\,B}$.

Porro pondus individuale corporum est in ratione composita gravitatum specificarum G, & voluminum, & volumina in ratione composita altitudinum A, latitudinum B, & longitudinum L; cum igitur pro E, quod dimidium pondus denotat, ponendum sit $\frac{A\,B\,L\,G}{2}$;

erit valor resistentiæ $= \frac{A\,B\,L^2\,G}{\frac{2}{3}\,A^2\,B} = \frac{3\,L^2\,G}{2\,A}$; in analogia fractio $\frac{3}{2}$ est constans. Hinc crescente longitudine corpus proprio pondere diffringi potest; sic teste Mariotto cylinder vitreus diametri $\frac{5}{3}$ lin. longitudinis 6 ped. infixus foramini horizontaliter propria gravitate fuit diffractus.

Multa præterea perelegantia corollaria ex dictis derivari possunt; quorum fundamenta iecisse satis est pro instituti nostri ratione; quapropter observationes de resistentia respectiva, ac flexione corporum subiiciemus; tum vires in nexum, quas pondera ad vectem adplicata exerunt,

consideràbimus, ex quibus æquilibrii caussam non nulli petunt.

§. CLXXXV.

Observationes De Resistentia Respectiva.

Adhibuit Muschenbrœckius parallelopipeda, quorum quodlibet latus erat 0, 27 pollic. Rhenol. quæ, cum flecterentur ante rupturam, distantias ante & post experimentum sollerter observavit, uti tabella ostendit.

Distantia ponderis a foramine, ante Experimentum. Pollic.		Distantia ponderis a foramine, cum frangitur corpus. Pollic.	Pondus frangens Unciar.
Picea	10	9	40.
Quercus	10	8,5.	48.
Ulmus	11	9	44.
Abies	11	9,5.	36,5.
Alnus	10	9,25.	48.
Fagus	10	7	56,5.

§. CLXXXVI.

Observatio II. Omnia corpora solida flexioni sunt obnoxia, eorumque partes, antequam dissolvantur, cedunt aliquo intervallo. Gradus ac diversitas flexionis non modo a viribus potentiæ inflectentis, sed potissimum a diversa fibrarum constitutione pendet. Utcunque autem variæ sint inflexiones, nullum adhuc deprehensum est absolutæ rigidum, quod in tenuiora filamenta sectum non sensibiliter flectatur. Vitrum certe quidem ex rigidissimis est, quorum cognitionem adhuc nacti sumus; idem tamen in fila tenuina ductum admodum flexile observatur, uti plumæ ex vitro confectæ, & tubi capillares probant. In his aliquem tres pedes longum in peripheriam circuli inflexum a se esse Muschenbroeckius testatur.

Ex æqualitate actionis & reactionis deduximus (§. XXXI.) generale principium ad tensionem, & compressionem corporum elasticorum, ac proinde etiam ad flexionem

nem eorundem pertinens; facta enim inflexione regulæ elasticæ partes seu fibræ superiores tenduntur: inferiores comprimuntur, ut in convexa superficie particulæ a se recedant, in concava ad se accedant. Generale illud principium his verbis enunciatur: Elater corporum pro ratione virium extranearum tenditur, & comprimitur, quamdiu corpus elasticum tendi, aut comprimi potest; sive resistentia & vis elateris corporum tensorum & compressorum æquatur vi tendenti, & comprimenti, quamdiu corpus elasticum ulteriorem compressionem admittit; sunt enim & tensionis & compressionis certi in omnibus corporibus limites, ad quos si ea pervenerit, partes amplius cedere non sentiuntur, quæcunque vis maior corpori inferatur; ipse aer, qui maxime comprimi potest, posteaquam eos limites attigit, perinde ac marmor durissimum resistit. Atque hoc casu resistentia non tam elateri, quam corporum impenetrabilitati, aut vi cohærentiæ adscribenda est, uti fit in rigidis corporibus: donec cohærentiæ vis a potentia agente superetur, ac nexus corporum dissolvatur. Ex eo, quod indicavimus principio concluditur primo: Si idem corpus elasticum æqualiter tenditur, comprimitur, flectitur, etiam vis tendens, comprimens, flectens æqualis est. Secundo: quo magis fibræ corporum extrahuntur, vel producuntur, eo magis resistunt potentiæ agenti; Nec tamen productiones, seu elongationes corporum tensorum, aut contractiones compressorum vi tendenti, aut comprimenti proportionales sunt, ita, ut si hæc dupla vel tripla sit, etiam corpus duplo vel triplo magis producatur, vel contrahatur, quam vi simpla; in plurimis enim corporibus, cum tenduntur, observamus productiones primo satis magnas esse; dein duplicata vi tendente productiones fieri minores, triplicata pariter minores, ut adeo productiones fibrarum continuo decrescant; quod capto experimento Bernullius observavit; sumta enim fuit chorda ex intestinis animalium tres pedes longa, cuius extremæ parti successive appensa sunt libræ 2, 4, 6, 8. Elongationes chordarum fuerunt 9, 17, 23, 27 lin. Atqui si ex ponderi tendenti fuissent proportionales, futuræ erant ut 9, 18, 27, 36. Verum quamcunque elongationes corporum ad vires tendentes rationem habeant; id tamen ex indicato supra principio manifestum est, quod vis, & resisten-

stentia elateris, quamdiu corpus tendi, aut comprimi potest, semper vi tendenti, & comprimenti par sit, & si in eodem corpore tensio, vel compressio, aut inflexio maior est, vis quoque tendens, comprimens, aut inflectens maior esse debet.

§. CLXXXVII.

Hypothesis. Sit F. III. T. IV. vectis sive regula flexilis I K A a æquabilis figuræ & elasticitatis per omnes partes, eaque concipiatur divisa in partes æquales octo, ac quævis eiusmodi pars concipiatur habere 10 particulas itidem æquales ut ab A usque ad E 40 particulæ, & ab A usque ad I sint 80. Hæc regula infra aliam horizontalem I a immobiliter sit fixa, aut infixa muro. Dein successive in diversis a fulcro I K distantiis adpliceutur pondera, nempe P in distantia simpla in e, & pondus p dimidium prioris in a distantia dupla; ac observetur

Primo quomodo tota regula inferior flectatur, & a superiore deprimatur; quod ostendunt intervalla A a, B β inter regulam superiorem, & inferiorem intercepta.

Secundo quomodo singulæ partes 1. 2, 3 &c. a puncto suspensionis ponderum versus fulcrum incurventur, sive quantam amissa figura rectilinea superius convexitatem, inferius cavitatem acquirant; idque colligi potest ex plano quodam ad partem convexam adplicato; angulus enim mixtilineus maior vel minor inter planum, & partem convexam interceptus maiorem vel minorem partium curvaturam indicat. Quantitas flexionis ad ipsum fulcrum I K ope tenuis cunei in angulum mixtilineum ad fulcrum immissi explorari potest; quamquam hæ observationes non nisi crassiore quodam modo hac quidem methodo fieri possunt, uti fere in aliis contingit experimentis plurimis; sola enim mathesis adcurationem habet. His constitutis & observatis vera erunt sequentia.

I. *Pondus normaliter adpensum vim duplicem exerit in singulas particulas vectis, normalem, & parallelam ad eundem vectem.* Nam *primo*, pondus normaliter adpen-

pensum non modo primam particulam, cui adplicatum est, sed omnes reliquas usque ad fulcrum urget verticaliter deorsum tota sua gravitate. Ac constat ex theoria aequilibrii, quod in fulcro cuiusvis vectis heterodromi sentiatur vis aequalis summae ponderum normaliter adplicatorum. *Secundo* observamus, regulam seu vectem inflecti a pondere, & incurvari, id est, partes superiores tendi, inferiores comprimi; quae est ipsissima tractio particularum vecti parallela; cuius ratio est haec: dum pondus p particulam primam normaliter deorsum urget, eam necessario simul determinat, vel urget ad divulsionem a proxima particula, hoc est, pondus p primam particulam determinat ad gyrationem circa punctum b tanquam axem; cum autem haec gyratio a nexu B b impediatur, necessario hic idem nexus, & cum eo secunda particula trahitur directione vecti parallela, eo fere modo, quo in quovis vecte rectangulari (F. IV. T. IV.) dum brachium horizontale urgetur deorsum, alterum brachium verticale A C urgetur ad gyrationem circa axem C, cuius prima directio est A d sive tangens arcus, quem punctum A gyrando describit; quae quidem tangens cum sit normalis ad brachium vel radium A C, eo ipso ad brachium C B & horizontem parallela erit. Haec quidem tractio, seu vis parallela, cum tendat ad dissolvendum nexum, adposite *vis in nexum* adpellatur, estque *proportionalis* ponderi p appenso, ita ut si aliud pondus duplum, triplum, vel in quacunque serie multiplum, vel submultiplum adhibeatur, pariter tractio parallela, seu vis in nexum dupla tripla, vel quomodocunque multipla, vel submultipla existeret.

II. *Vires in nexum particularum a puncto suspensionis usque ad fulcrum crescunt continuo, sive per singula puncta distantiae, & uniformiter, id est, per singula puncta aequaliter dependenter a pondere appenso.* Nam ex observationibus curvatura singularum partium AB, B C, C D &c. in quas regula divisa concipitur, a puncto suspensionis usque ad fulcrum continuo fit maior, ita ut dum primae partes A B, B C parum admodum a linea recta recedunt, interiores F G, G H magis convexae sint; consequenter vires quoque incurvantes, seu inflectentes, quas adpellamus vires in nexum, a puncto su-

ſpenſionis verſus fulcrum creſcant, neceſſe eſt (uti ex Schol. §. CLXXXVI. colligitur. Ratio huius incrementi videtur eſſe eiusmodi; quemadmodum in prima particula ex vi normali oritur vis parallela; ita idem fit in ſingulis particulis reliquis; quare in ſecunda particula, quæ a prima iam trahitur vi parallela, & quæ præterea ſuſtinet actionem normalem ponderis, ex qua nova vis parallela priori æqualis oritur, dabitur vis parallela dupla prioris. Hæc ſecunda particula, eadem vi, qua ipſa trahitur, nempe dupla trahit tertiam; cum autem hæc tertia particula æque, ac priores, ſuſtineat actionem normalem ponderis; idcirco habebit vim triplam, quarta quadruplam, & ſic deinceps in quacunque particularum ſerie, ſi nexus non ſolvitur. Hæc incrementi ratio ut manifeſtior evadat, ſint (F. IV. T. IV.) bini vectes rectangulares A C B, a c b ſintque brachiis horizontalibus appenſa æqualia pondera P, & p. Inprimis punctum A ob pondus P trahitur horizontaliter directione tangentis A d. Si inter ſuprema puncta A & a brachiorum verticalium intercedat nexus, eadem tractio horizontalis dependenter a pondere P erit in puncto utroque A & a. Si dein alteri brachio horizontali c b pondus p priori æquale adpenditur, in puncto ſupremo a vectis ſecundi dabitur vis ſeu tractio horizontalis dupla, cui ſuſtinendæ requiritur pondus Q æquipollens ponderibus P & p ſimul, ſi brachia verticalia A C, a c eiusdem longitudinis ſint ac horizontalia C B, c b. Sic in vecte propagatur tractio parallela, & vis normalis ponderis, quam ſecunda quoque particula (uti omnes reliquæ usque ad fulcrum) ſentit, idem præſtat, ac pondus p in poſito caſu adplicatum ſecundo vecti rectangulari a c b.

§. CLXXXVIII.

Corollarium I. Quia vis parallela a puncto ſuſpenſionis usque ad fulcrum creſcit uniformiter ſecundum numeros ordine naturali aſcendentes 1, 2, 3, &c. idcirco ad ipſum fulcrum ea vis eſt ut factum ex vi, quæ erit in primum nexum, in diſtantiam ponderis a fulcro. Ac ſi (F. V. T. IV.) vectis vel regula I K A a ponitur continuari ultra fulcrum I K, & alteri extremo B adplica-

plicari pondus expressum linea P M, quod sit reciproce ut huius distantia D ab hypomochlio ad distantiam d alterius ponderis expressi per rectam p N; erit vis in nexum communem I K ad fulcrum dependenter ab utroque pondere æqualis. Sit enim vis a pondere P in nexum primæ particulæ, in quam agit $= V$; erit vis in nexum communem I K dependenter ab eodem pondere $P = VD$. Sit dein vis a pondere p in nexum primæ particulæ, ex qua pendet, $= u$; erit vis in nexum communem ad fulcrum $IK = u d$. Dico; si pondera & distantiæ reciprocant, hasce vires V D, & u d in nexum communem ad fulcrum I K esse æquales; cum enim vires V, & u in primum nexum particularum, ex quibus P & p suspenduntur, cæteris manentibus iisdem, sint proportionales ipsis ponderibus (§. CLXXXVII. n. I.) erit $V : u = P : p = d : D$, quia pondera & distantiæ reciprocant; igitur erit $VD : ud = PD : pd$; est autem $PD = pd$; consequenter etiam $VD = ud$.

Parum adcurate de hac re loquuntur iidem ipsi, qui vires æquales in communem nexum ad fulcrum pro genuina caussa æquilibrii statuunt. Aiunt enim: eadem vi, qua pondus deorsum agit, urgetur primus nexus in B. F. III. T. IV. id vero non nisi sub duplici hypothesi simul concurrente verum esse potest. 1. Si prima particula cum secunda duntaxat connecteretur in supremo puncto B, non vero per totam altitudinem B b. 2. Si altitudo regulæ B b æqualis ponitur assumtæ longitudini b a. Ostendimus autem supra, quomodo in determinanda vi in nexum ratio altitudinis, imo & latitudinis habenda sit. Si vis in primum nexum æquaret gravitatem absolutam ponderis, eaque dein pro ratione distantiæ usque ad fulcrum cresceret, celeriter rumperentur omnes regulæ ad eiusmodi experimenta adhibitæ; quapropter vires in nexum non æquales ponderibus, sed dum cætera omnia sunt constantia, proportionales ostendimus; idem tamen, quod hi Auctores volunt, eruimus; nempe æqualitatem virium in nexum communem ad fulcrum in hypothesi ponderum cum distantiis reciprocantium.

§. CLXXXIX.

§. CLXXXIX.

Corollarium II. Si regula aut vectis aucto pondere rumpitur (quia vis cohærentiæ infinita non est) diffractio contingit circa fulcrum, vel ad oram foraminis, qua muro immittitur; etsi enim vis cohærentiæ per omnes particularum nexus ponatur eadem; tamen vis in nexum ad diffractionem urgens crescit pro ratione distantiarum a puncto suspensionis; quare diffractio fiet, ubi maxima distantia, maximaque vis est, nempe ad fulcrum, vel oram foraminis. Id quoque animadversione dignum, corpora, quorum resistentia absoluta vel respectiva contrariis potentiis succumbit, diversas festucas formare, in primis ligna quædam admodum longas & acutas, alia breviores, magisque obtusas, alia pene nullas habent; id quod notandum est pro interno pariete navium bellicarum, in quibus fervente prælio plures vulnerantur a festucis ligni milites, quam ab ipsis globis tormentariis, ut Musschenbroeckius ait; lignum, quod absque festucis rumpitur, huic incommodo medetur.

Inflexiones corporum homogeneorum sunt in ratione composita ex directa ponderum appensorum, & reciproca triplicata altitudinum, ac simplici latitudinum, & quamvis Bernoullius primus observarit: non omnes fibras per totam altitudinem trabium tendi, sed multas inferiores comprimi; tamen id assignatæ legi non obstat; quoniam in corporibus homogeneis ea altitudo, per quam fibræ tenduntur, ad totam trabium altitudinem, æqualem rationem servat, quia corpora homogenea similes flexiones habent a simili partium, ac nexuum flexione pendentes; quapropter ea lex resistentiæ respectivæ, quam §. CLXXXI. exposuimus, integra manet, cum præsertim experientia ostendat, resistentiam respectivam in ratione reciproca duplicata altitudinum esse. Multum commodi ista res habet; imminuta enim mole trabium sat firmitatis obtinetur ex iusta earundem altitudine. Certe Parentius l' Hist. de l' Acad. Roy. 1708 *integram tabellam dedit, ex qua adparet, quomodo diminuendo quantitatem ligni, & augendo altitudinem augeatur robur trabium. Est tamen proportio quædam altitudinis, & latitudinis retinenda, ne hac supra modum imminuta trabs*

vi

vi laterali rumpatur, eiusque partes mediæ ad latera extrudantur. Fuere, qui rationem resistentiæ absolutæ & respectivæ tum per experimenta quædam tum per calculos determinare conati sunt, eamque statuerunt ut 3. 1. vel ut 4: 1, Negari non potest, inquit Musschenbroeckius, has rationes aliquando obtinere; sed reperitur etiam ratio ut 18: 1. & omnes intermediæ rationes inter hanc, & 3: 1. addit: " Si Philosophi, antequam operam huic doctrinæ " navassent, prius plurima tentamina adcurate instituissent, " multis pepercissent laboribus, neque unquam universali " regulæ inveniendæ incubuissent; quot enim fere diversa " corpora dantur, totidem diversæ proportiones inter co- " hærentiam absolutam, & respectivam deprehenduntur. " Nec difficile est rationem invenire, ob quam multo maior absoluta, quam respectiva resistentia esse debeat; crescunt enim vires ponderum normaliter adplicatorum in nexum: fibræ per altitudinem inæqualiter tenduntur, magis superiores, quam inferiores; infimæ omnino comprimuntur; cumque in supremo nexu quædam ruptura facta est, facile inferiores fibræ scinduntur. At si actio ponderum duntaxat parallela est, uti in resistentia absoluta, eorum vis per omnes fibras æqualiter diffunditur, & in omnibus sectionibus eadem est, nec ullum incrementum habet. Sed plurimi Philosophi prætermissa hac de resistentia corporum tractatione duntaxat caussam cohærentiæ quærunt, eandem, ut Musschenbroeckius animadvertit, pro libitu fingendo, orbique obtrudendo, ut ex ea phænomena, quæ in solidorum cohærentia occurrunt, explicent; hos, inquit, sicco pede transimus, cum nihil boni, stabilisve nostræ sententiæ attulerint, sed eam potius inutilibus opinionibus aggravaverint. Sine dubio de resistentia corporum, & usu atque adplicatione theoriæ multa commemorari præterea possunt, quæ ob angustias operis prætermittenda sunt. Quapropter non nisi generales quasdam animadversiones subiiciemus de firmitate corporum, ut nemo non videat, quam late experientiæ, & observationum campus pateat.

§. CXC.

Observationes de Firmitate Corporum.

I. Vulgaris quondam opinio erat, funes ex funiculis intortis, ac convolutis compositos esse fortiores, & maiori ponderi ferendo pares, quam si totidem funiculi inter se paralleli, & non intorti adhibeantur. Contrarium primus, quod scio, docuit Mersennus L. 3 Harmonices Prop. 26. postea experientissimi viri Reaumurius, & Musschenbroeckius institutis experimentis evicerunt, funes intorsione funiculorum debiliores fieri, atque ille quatuor contorsit fila, quorum primum 9 tt, alterum 7, tertium & quartum $7\frac{1}{2}$ seorsim ferendis paria erant; quare coniunctim 31 libr. sustinere debebant; sed, posteaquam contorta sunt, appensis $21\frac{1}{2}$ libris frangebantur. Minuitur igitur contorsione firmitas funiculorum; atque id, ni fallor, ex iis, quæ de resistentia corporum a nobis dicta sunt, comprobari potest; nam spectata intorsione perspicuum fit, partes funiculum intortum componentes inæqualiter tendi, plus exteriores, minus interiores, eo fere modo, quo nexus superiores trabium horizontaliter positarum magis tenduntur, quam inferiores; quocirca inæqualis est filamentorum resistentia, & vis externa partes iam antea tensas citius dissolvit, iisque solutis paulatim totum funem rumpit; cum igitur resistentia respectiva omnium corporum multo minor sit, quam absoluta; nihil mirum videri potest, idem in funibus observari, qui ex fibris tenuioribus perinde, ut reliqua corpora componuntur; & quamvis differentia tensionum in partibus singulorum funiculorum haud magna sit; crescit tamen eadem ex summa omnium, & in fune crassiore ex multis funiculis composito valde augetur. Errant igitur, qui fila valde contorqueri iubent, ut funis validior fiat. Sic enim rigidior redditur, non item firmior; quia ipsa contorsione iam debilitatur, & aliquando, si crassior sit, etiam rumpitur. Experientiæ in funibus homogeneæ materiæ captæ a ratione crassitierum magnopere recedunt; quod tum contorsioni, tum diversitati filamentorum lini aut cannabis adscribendum est. Sed, inquiunt: intorsione filamentorum

torum crescit latitudo & crassities funis, quemadmodum e contrario longitudo funis a longitudine funiculorum deficit. Hinc putant, funiculos contortos plus firmitatis habere; sed nempe debilitationem ex intorsione ortam maiorem esse illo incremento, quod ex maiore latitudine, vel crassitie accedit, experientia, & ratio supra indicata probant. Musschenbroeckius loco funium adhiberi fasciolas vult, in quibus prima fila inter se recta & parallela manent, aut, cum fasciae omni usui haud inserviant ob latitudinem, & planitiem, funiculos ita contexendos iudicat, quo modo taeniae solent, vel ut capilli texuntur, ut nempe funiculis nulla vis inferatur ob contorsionem. De usu funium, qui cylindris aut trochleis circumvolvuntur, observat Cl. Amontons, eorum resistentiam, ac difficultatem crescere, quo funis rigidior est, & maiore tractus pondere, quo crassior, quo minor peripheria cylindri, cui circumvolvitur, & quo celerius volvendus est; cumque is totam resistentiam calculo subiecisset, invenit, quod potentia, quae, ut onus 3000 libr. ope trochleae mobilis attolleret, illius subdupla nempe $=1500$ tt esse deberet, computata funis resistentia ipsum onus excederet, & libras 3942 aequaret.

II. *Ex lignis* firmiora censentur, quae minorem medullam ferunt, & quae graviora sunt; id quod commodum est explorandae firmitati, cum minora frusta aequalia facile ponderari possint. Lignum, quod brevi tempore in truncum latum excrescit, & cuius circuli annui maiores sunt, est solidum, ac durabile: quod plurium annorum decursu intus lente in trabe corruptum fuit, facile putrescit. Ligna, quae crescunt in loco edito aeris iniuriis multum exposito solidiora sunt, & sicciora, quam quae crescunt in locis humilibus, & palustribus. Ligna inculta praestant domesticis, sterilia fertilibus. Ex domesticis illa praeferuntur, quae tardius fructum ferunt, eumque acerbiorem. In quibusdam speciebus fibrae transversales multo debiliores, quam longitudinales observantur, praesertim si istae in lineas satis rectas excrescunt; hinc dum eiusmodi ligna adpensis ponderibus gravantur, saepe cylinder, vel parallelopipedum interius a lateribus separatur, & instar gladii ex

vagi-

vagina extrahitur ; id quod Musschenbroeckius expertus est in ligno alni, piceæ, & fraxini. Diversam fibrarum constitutionem in speciebus diversis indicant discrepantes festucæ, quas fracta relinquunt ; ut supra adnotavi. Crescunt arbores certo tempore ; deinde consistunt aliquamdiu, postea decrescunt ; ac dum crescunt, trunci incrementum capiunt singulis annis, dum corticis interior tunica ad lignum trunci accedit, & accrescit ; hinc non potest esse truncus per totam substantiam æque firmus ; meditullium maxime annosum est ; sequitur ætate pars proxima ; novissima est, quæ cortici adhæret. Tenerum, & molle est lignum, quod novum, utpote parum compressum, & aquosis plenum succis ; durius est, quod annosius, quia comprimitur circumquaque a ligno ambiente, & quia plus resinæ collegit ; id quod experimenta a Musschenbroeckio, & Parentio instituta probant. Vulgo creditur, lignum, quo recentius, eo magis flexile esse, & quod annosius, idem esse fragilius, id verum in ramis : in trunci substantia falsum reperitur, quia oleum, quo meditullium trunci copiosius gaudet, quam partes cortici proximæ, facit, ut meditullium flexibilius sit. Solet autem idem meditullium primo corrumpi, cortex diutissime perstare ; hinc meditullium eo casu haud firmissimum est, imo aliquando debilissimum ; generatim vero experimenta cohærentiæ in lignis eiusdem arboris instituta docent, firmissimum esse meditullium, debilissimum cortici proximum, in intermediis partibus inæqualitas reperitur, quæ a diverso modo pendet, quo partes concreverunt, a calore, frigore, humiditate, & siccitate æstatis ; ob quas aliasque caussas ligna etiam homogenea, sive eiusdem speciei magnopere sæpe discrepant, uti in solo magis, minusve aquoso, & paludoso, oleoso, salso, in regione calidiore, aut frigidiore adolescunt. De partibus eiusdem ligni præterea adnotandum est, lignum densius, sive circulo in trunco transverse secto propiores inter se esse ea parte, qua boream spectat, quam qua austrum. Partes terræ viciniores plus ponderant, magisque resistunt, quam reliquæ ; nodi, rami & fibræ abruptæ firmitatem minuunt. De diversitate lignorum, quæ in diversis operum, & ædificiorum

orum

rum partibus maxime uſui ſunt, Vid. Rieger Arch. civ. §. 168. item Bellidor Scient. Ing.

III. *Inter ſaxa* ſolidius reperitur, quod venarum plexus acutiores habet: facile finditur, quod in medio venam rubram, & velut putridam nutrit. Saxum molle recens effoſſum, ſi libero aeri exponitur, diutius durat: item in aqua, frigore, vel calore ingente diſſilit. Hinc ſaxa ex lapicidinis eruta per æſtatem aeri expoſita re n.quuntur; ac quod aeris iniuriis reſiſtant, indicio eſt, ſi in loco patente poſita per biennium durent, ſibique conſtent: humori cenſentur reſiſtere ea, quorum pondus ab affuſa aqua non augetur &c.

CAPUT IX.

De Frictione Corporum.

Vi theoriæ machinarum potentiæ paullulum auctæ ultra deſignatas ſuperius rationes oneri movendo pares ſunt; at ob frictionem, quam potentia agens non minus ſuperare, atque ipſum onus debet, eius incrementum haud mediocre, ac multo etiam maius evadit præſertim in prægrandioribus machinis, quam nos nulli ſibi perſuadent. Inde fit, ut magni ſæpe errores committantur, ac inutiles ſumtus ad conſtruendas novas machinas prouciantur, quæ omnem exſpectationem fallunt non vitio theoriæ; ſed quod hæc omnino incompleta transferatur ad uſum.

§. CXCI.

Definitio. *Frictio* ſive *attritus* eſt reſiſtentia; quæ ex ſuperficierum mutua adplicatione in motu corporum, & machinarum oritur. Quando nimirum corpus quoddam ſuper aliud movetur, ac utriusque ſuperficies quadam parte ſe contingunt, reſiſtentiam experimur cæteris paribus eo maiorem, quo maior eſt ſuperficierum aſpe-

asperitas, sive quo minus corpora, qua parte se contingunt, polita sunt.

§. CXCII.

Observatio. Omnia corpora, utcunque polita oculis vel etiam tactui videantur, superficies inæquales & asperas, id est, partes alias prominentes, alias dehiscentes, velut colliculos quosdam, & foveolas seu cavernulas habent; hinc dum unum corpus in superficie alterius movetur, necesse est, ut prominentiæ unius in alterius cavitates se insinuent, haud secus ac si dentes rotæ unius dentibus alterius, vel scopa scopæ committatur. Hinc motus continuari nequit, nisi mobile cum suis partibus aliquantum attollatur, aut partes prominentes inflectantur, vel abradantur, aut utrumque fiat. Hæc superficierum asperitas minui potest, tolli non potest vel ob ipsam corporum porositatem, qua plurimis meatibus undique pertusa sunt, & partes solidas in vacuo diffusas atque extantes habent. Igitur frictioni quævis corpora naturaliter subiecta sunt, multasque idcirco subeunt mutationes. Vestes, ac supellectilis omne genus, instrumenta mechanica, corium, asseres, ipsa marmora, ac gemmæ frictione paulatim deteruntur: acies cultrorum, novacularum, pennarum identidem reparandæ sunt; cumque ferri in vita civili maximus sit usus, mirum haud est, eius particulas quaquaversus dispergi, & in plurimis corporibus, vel cineribus eorundem per analysin chymicam reperiri. Luti colorem nigrum, qui in viis tritis observatur, deperditis ferri particulis adscribunt plurimi. Ex attritu variæ striæ corporum, tum pulvis oritur, quæque sunt generis istius sexcenta.

§. CXCIII.

Definitio II. Motus corporis super aliud vel est *radens*, cum eædem semper mobilis partes alterius superficiei adplicantur, ut si trabs terræ incumbens, aut tra-

traha per nivem, vel glaciem movetur: vel eſt motus *volvens*, cum aliæ continuo, atque aliæ ſuperficiei mobilis partes alteri corpori adplicantur, uti cum globus vel rota per ſolum volvitur, & motus gyrationis cum translativo iungitur. Quando rotæ circa axem non ea celeritate aguntur, quam celeritas translationis poſcit, eædem partim volvuntur, partim raduntur, ac motus ex utroque mixtus oritur. Frictio, quæ motui radenti opponitur, dicitur *primæ ſpeciei:* quæ volventi, *ſecundæ ſpeciei.* In omni autem motu unius corporis ſuper aliud ea inſtar reſiſtentiæ, ſeu potentiæ motui contrariæ ſpectanda eſt; reſiſtit enim ſeparationi corporum, quorum ſuperficies contiguæ ſunt, & inter ſe ita committuntur, ut ſeparatio directione ad ſuperficies parallela difficilis evadat.

Frictio differt a pondere corporum; nam horum elevationi gravitas, non frictio per ſeſe, contra motui horizontali frictio, non gravitas reſiſtit. Siquod corpus per aliud molle incedat, idque ſecare debeat, reſiſtentia quædam oritur, quæ a frictione non nihil diverſa eſt, ad eandem tamen ſæpe referri ſolet. Quæritur, quomodo frictio ob adpreſſionem unius corporis ad aliud, ob ſuperficies, ac celeritatem motus creſcat; de quibus deinceps agendum eſt, quantum in re perdifficili, necdum ſatis tractabili fieri poteſt.

§. CXCIV.

Hypotheſis (F. VI. T. IV.) collocetur primo corpus quoddam, ceu cubus Q baſeos politæ in plano horizontali A B pariter polito, quantum ſenſibus adparet. Dein concipiatur hoc planum elevari in a, & inclinari ad horizontem eousque, donec corpus ſuper illud gliſcere incipiat, & deſcenſum proximum minitetur, ita ut aucto paullulum angulo inclinationis A B a, quem in iſta hypotheſi vocant *angulum quietis*, corpus reipſa deſcenderet. His poſitis dico

I. *Quocunque in plano polito statuatur corpus, eo maior est frictio, quo maior est pressio eiusdem in planum, sive in aliud corpus.* Cum enim ob asperitatem superficierum, illarum quoque, quæ magnopere politæ videntur, partes prominentes corporis unius immergantur in cavitates alterius, atque ut motus haberi possit, eædem frangi, flecti, aut potius e cavitatibus iterum eximi debeant, vi opus est, ut vincatur pressio corporis mobilis in alterum, quæ vis, ut patet, eo maior esse debet, quo maior est pressio. Quapropter frictio, qua superficies separationi resistunt, crescit pressione crescente.

Quoniam potentia motum gignens, & frictionem in motu vincens non directe opposita est pressioni, uti, siquod corpus grave directione horizontali, vel obliqua trahitur; idcirco vires potentiæ, per quas frictionem vincit, non æquales ipsi pressioni, sed quodam modo proportionales esse debent. Amontonus, Parentius, Hirius, Bellidorus in plurimis casibus sæpius occurrentibus, quando superficies corporum non admodum asperæ, & polituræ incapaces sunt, repererunt frictionem pressioni proportionalem. Ea pressio non modo a gravitate absoluta, siquod corpus in plano horizontali trahitur, vel a vi normali aut pressiva in planum inclinatum, sed ab aliis quoque caussis, & potentiis, ceu ab elasticitate sæpe provenit.

§. CXCV.

II. *Si pressio eadem manet, frictio non multum variari potest, quæcunque ponatur maior vel minor corporis, quod frictionem sentit, superficies.* Concipiatur primo superficies cubi divisa in partes æquales 100, ac pressio cuiusvis partis ut 1. Igitur elevari debebunt 100 partes per summam totidem virium, quotquot iis partibus respondent. Dein concipiatur dimidius cubus alteri dimidio imponi; restabunt in superficie partes 50, quarum singulæ ob duplum pondus premuntur vi ut 2; patet, quod per se eadem futura sit frictio utroque casu-

fu; five enim 100 pondufcula elevanda fint e fuis cavitatibus, quorum fingulorum preffio eft ut 1, five pondufcula 50, quorum preffio eft, ut 2; eadem adhibenda vis erit. Concipiatur frictio totalis eo maior, quo plures funt partes prementes, five quo maior eft fuperficies, & quo vis preffiva in fingulis partibus maior eft; erit frictio totalis ut factum ex preffione fingularum in fummam omnium, five in fuperficiem. Sint hæ preffiones fingularum partium in primo cafu a nobis pofito P, in altero p, fuperficies prima S, altera s; frictiones F, & f; erit F : f = P S : p s. Eft autem in pofito cafu P : p = s : S; confequenter P S = p s; igitur F = f, five frictiones totales eædem.

Si manente eadem vi preffionis corpora fecundum maiores fuperficies fibi adplicantur, five pluribus partibus fe contingunt, frictio etiam in ratione fuperficierum quodam modo augetur; ponatur Cubus Q gravitatis expers, eiusque tota preffio in planum A B oriri ab impofito corpore Z; inter quod, & cubum Q planum O S interiacet; perfpicuum eft, quod corpus impofitum Z eadem vi planum O S, cubum Q, & planum A B premat; fi iam planis O S, & A B immotis cubus Q extrahendus foret a potentia D; hæc non modo refiftentiam frictionis, quam bafis inferior cubi a plano A B patitur, fed etiam illam refiftentiam, quam bafis fuperior patitur a plano O S, fuperare debet; cum igitur preffio in utrumque planum fit eadem, neceffario aucta fuperficie, qua fit attritus, vis potentiæ eundem fuperantis augenda eft.

§. CXCVI.

III. *Si planum A B elevari concipitur in a, & inclinari fub angulo quietis, five donec corpus proximum lapfui fiat, frictio eft ad preffionem, ut altitudo plani ad bafin, five ut tangens anguli quietis ad radium.* Denotet enim Q n vim preffivam in planum, Q m relativam feu plano parallelam; patet in eo fitu vim relativam Q m æqualem effe frictioni, qua corpus a motu per pla-

num unice cohibetur; est igitur frictio ad pressionem, ut Q m : Q n sive A a : A B, ut altitudo plani ad basin, sive sumta recta A B pro sinu toto, ut tangens anguli quietis A B a ad radium. Bellidorus institutis plurimis experimentis angulum quietis reperit = 18°, 20′, cuius tangens ad radium est ut 33136:1,00000, proxime ut 1:3. Igitur hoc quidem modo frictio aequalis est tertiae parti pressionis; ac si corpus in plano horizontali movetur, cum pressio par sit ponderi, frictio aequabit tertiam partem ponderis.

Alii paullo alium repererunt angulum quietis; Parentius 19°, 17′. Bulfingerus inter 12°, & 15°. Unde alia provenit quantitas frictionis. Amontonus omnem frictionem aequari $\frac{7}{20}$ ponderis appressi putat. Sed generalis regula adcurate statui non potest, quia in corporibus etiam homogeneis maxime discrepat superficierum constitutio, partium prominentium, vel dehiscentium figura, rigor, elasticitas, cohaerentia pro varia corporum vetustate, siccitate, humiditate. In vulgarium machinarum usu, ait Caillius, tuto sumi potest, frictiones praecise pressionibus esse proportionales, saltem si motus in similibus superficiebus fieri contingat: praeterea absque notabilis erroris periculo generatim cum Bellidoro in praxi mechanica statui potest, frictionem aequare tertiam partem pressionis directae in superficiem, quae frictionem subit. Certe experimenta minorem potius, quam maiorem frictionem exhibent.

§. CXCVII.

Corollarium I. Si pondus per planum inclinatum, ceu per machinam elevandum est, vi relativae ponderis, quae superanda est, addi debet frictio; ac si angulus inclinationis plani minuitur, ut vis relativa ad absolutam habeat rationem minorem, e contrario vis pressiva, & proin etiam frictio maiorem rationem habebit ad vim eandem relativam. Atque ob hanc caussam, quo maior est frictio, eo magis directio potentiae a directione motus elevanda est. Hinc Dan. Bernoullius (Act. Acad. Petrop. 1768.) ait, si via silicata sicca onera trahenda sunt, funes ad angulum 26°. 34′ dirigendos esse;

ſe; addit: hanc regulam aurigas noſtros non male obſervare vidi. Univerſe utiliter adhibetur obliquitas potentiæ, quando reſiſtentia directa frictionis notabilem ponderis promovendi partem efficit, eaque a ſublevatione ponderis citra aliud incommodum notabiliter imminuitur.

§. CXCVIII.

Corollarium II. Potentia movens quovis progreſſu motus ſui frictionem ſuperare cogitur; quo celerius igitur movetur onus, eo ſæpius intra datum tempus vis oppoſita frictioni adhibenda eſt. Hinc frictionem pro ratione celeritatis creſcere autumabant non nulli. At enim, quo maiore celeritate fertur corpus, eo minor intricatio partium utriusque ſuperficiei fieri poteſt; quia partes prominentes in cavitates immergi non niſi intra continuum tempus poſſunt. Ob hanc cauſſam corporum celeritatem nihil momenti habere in frictione quibusdam videbatur. Dan. Bernoullius Act. Acad. Petrop. An. 1768 ait: *Corpora ſuper plano quieſcentia non aliter dici poſſunt frictionem habere, quam virtualiter; ſtatim vero, ac moventur, ſubito totam ſuam frictionem manifeſtant, ſive lentiori, ſive celeriori motu ferantur; nec enim quidquam velocitates ad frictionem ſive augendam ſive diminuendam conferre experimentis innotuit.* Mirum id videbitur non nullis, & obſervationibus obviis repugnans; certe equus ad ſuperandam currus frictionem longe maiorem vim in prima illius ad motum determinatione, quam curru in motu iam conſtituto adhibere cogitur; ſimiliter in campana ad primas oſcillationes cienda maiore vi opus eſt, quam easdem continuandas. R. Ex his conficitur, frictionem a corpore iam moto facilius ſuperari: non item minorem eſſe frictionem; cum enim corpora velocitatem impreſſam vi inertiæ conſervent, excluſa frictione ſine ulla determinatione nova perſeverarent in ſtatu motus: ea præſente motum ſuum paulatim minuunt per ſeſe, ac denique amittunt; nova autem potentiæ actione motum iam inchoatum, conſervatumque quadam parte per vim inertiæ facilius retinent.

At enim perdifficile eſt, rem ad apicem examinare.

 Illud

Illud in machinarum usu, & theoriæ adplicatione curandum, ut maximæ, quæ in machinarum motu occurrere potest, resistentiæ accommodetur potentia; secus enim fieri potest, ut ea oneri aliquando succumbat. Illud etiam observatum est, inter superficies corporum heterogeneorum cæteris paribus minorem esse affrictum, quam inter homogenea, quod omnes artifices iam dudum compererunt. Chalybs minorem attritum in orichalco, plumbo & cupro habet, quam in chalybe. Ligni quercini minor est frictio, si cum ulmeo committatur, quam si quercinum cum quercino, ulmeum cum ulmeo. Remedia frictionum physica sunt olea, & pinguedines superficiebus metallorum inunctæ; nam superficies reddunt magis æquabiles: cavitates implent; partium intricationem, ac mutuos ingressus, atque etiam abrasionem minuunt; calori quoque, ob quem extenduntur superficies, seseque arctius stringunt, medentur: ligna inunguntur sapone. Mechanice imminuitur frictio attollendo potentiæ directionem, quodque præcipuum est, motum rasionis vertendo in volutationem; in quem finem homines rotas subiecerunt curribus; ac sæpe rotæ, vel cylindri, vel globi non adfiguntur oneri movendo, sed subiiciuntur duntaxat; quo facto etiam frictio circa axem rotæ cessat, atque onus celerius provehi potest. Non nullæ sunt frictionum utilitates, uti in limis, lapidibus molaribus &c. patet. Curruum motus rapidos in plano declivi impediunt, præsertim si rotæ catena ferrea stringuntur, ut motus volvens data opera in radentem vertatur. Ob easdem tutius gressum figunt animalia, lineamque directionis facilius intra basin conservant, vel reducunt, uti ob similem rationem muscæ, aliaque insecta per vitra etiam politissima deorsum versa obambulant, uncos, quos habent, pedibus asperitatibus eorum corporum infigentia.

Scholion Generale.

I. Disceptationem de ultima, ac genuina caussa æquilibrii in vecte in hoc Scholion conieci, neque enim ea, ut a plurimis agitari solet, momenti cuiusdam videtur esse, præsertim si illa in longum protracta res pulcherrimæ ad staticem pertinentes propterea negligendæ sunt. Nec vero eadem adcurate tractari potest, nisi plurima ex iis, quæ hac sectione exposuimus antea

ſint perſpecta. In ea conſtanter opinione ſum, nullam ulteriorem æquilibrii in vecte cauſſam ſtatui poſſe, ac debere, niſi oppoſitionem, atque æqualitatem virium potentiæ cuiusdam tertiæ cum vi compoſita potentiarum agentium. Hæc quidem cauſſa & vera eſt, & phœnomenis explicandis penitus ſufficiens: *Vera* eſt, cum poſito æquilibrio ea virium oppoſitio ſemper detur, & poſita e contrario virium oppoſitione non poſſit non dari æquilibrium, uti capite I. oſtendimus. Eandem cauſſam admodum generalem eſſe, ipſa theoriæ diductione exhibuimus. Potentiæ ad vectem adplicatæ ſine dubio agunt in puncta vectis; ſed non illud hic quæritur, qua de cauſſa puncta, vel partes minimæ vectis inter ſe cohæreant, ac potentiis ad divulſionem urgentibus reſiſtant, ſed cur ſyſtema potentiarum vecti adplicatarum in æquilibrio ſit, id quod ex intenſitate, directione, oppoſitione, atque æqualitate virium pendet; etſi igitur de cohæſione nihil ſtatuatur hoc loco, tamen vera, & ultima æquilibrii cauſſa intelligitur haud ſecus, ac pendulorum motus intelligi poteſt, quin cauſſa indagetur, ob quam puncta fili cohæreant. Vis cohæſionis particularum vectis conditio eſt quædam, ſive requiſitum, ut vocant, non autem cauſſa, nec mediata, nec immediata æquilibrii. Verum ut nihil diſſimulemus, argumenta contraria, quæ digna videbuntur, exponenda ſunt.

II. Dicunt: *Si pro vecte phyſico linea geometrica ſumitur, æquilibrium non niſi ideale proponitur.* R. n. a. Dum lineam pro vecte ſumimus, id modo denotamus, actionem potentiarum, earumque æquilibrium a pondere, craſſitie, & flexibilitate perticæ aut vectis non pendere; quæ coniuncta ſunt, & complicata in naturæ inveſtigatione, ea analyſi indigent, uti ſupra adnotavi.

III. *Fulcrum, quod pro tertia potentia ſumitur, duntaxat efficit, ut vectis cum ponderibus non decidat: non autem efficit, ut pondera circa fulcrum immotum gyrari & converti non poſſint; atque id in primis explicandum eſt, cur pondera, quorum vis abſoluta inæqualis eſt, non vertantur circa fulcrum immotum.* R. Vis, qua pondera nituntur vectem convertere circa fulcrum, eadem

ipſa eſt, qua nituntur deſcendere: ſi ergo ex fulcro intelligitur, cur deſcendere nequeant; pariter intelligi debet, cur vectem nequeant convertere; neque enim duos diverſos niſus exerunt pondera. Nec vero ad rationem æquilibrii neceſſarium eſt, ut obex immobilis quodam loco ponatur, aut præciſe in puncto vectis intermedio ponatur; modo vis compoſita potentiarum agentium æqualis eſt vi tertiæ potentiæ vectem oppoſita directione urgentis, æquilibrium habebitur.

IV. *Immoto fulcro pondera circa illud oſcillare poſſunt, uti fit, ſi alterutrum brachium non nihil attollatur, vel deprimatur; igitur vis ponderum a fulcro non extinguitur.* R. Ut huius oſcillationis ratio penitiſſime intelligatur, in memoriam revocanda ſunt, quæ §. CXLIII. de centro motus diximus. Quando pondera, & diſtantiæ reciprocant, & centrum motus *in ipſa linea iugi* ſitum eſt, quovis ſitu obliquo conſiſtunt pondera ſine ulla oſcillatione; ſi *infra lineam iugi* centrum motus deprimitur, tum iugo a ſitu horizontali dimoto non oſcillatio, ſed everſio ponderum, ac vectis ſequitur; ſi denique *ſupra lineam iugi* puncta ſuſpenſionis connectentem attollitur id centrum, tum oſcillatio fit, quia pondus ſublatum auget diſtantiam a centro motus, ac proin maius momentum habet ob ipſum ſitum, vi cuius moveri tum quidem non poteſt, niſi maiore reſpective celeritate moveatur; quapropter iterum relabitur, ac motu quodam accelerato relabitur, ita ut ultra lineam horizontalem deſcendat, alterumque attollat. Sed quoniam hoc alterum deinceps diſtantiam auget, & maius momentum acquirit, prioris motum extinguit, ipſumque relabendo motum accelerat; quo quidem modo, ſi affrictus & reſiſtentia medii abeſſet, oſcillationes, uti in omni pendulo ſemper continuarentur, ac mobile perpetuum haberemus. Quamprimum igitur pondera a ſitu ſuo dimoventur, ut alterum augeat, alterum minuat diſtantiam a centro motus, potentia tertia non iam illo vectis puncto eſt adplicata, a quo deſumtæ diſtantiæ cum ponderibus reciprocant; nihil igitur mirum eſt, ſi æquilibrium eo caſu deficiat; cum fulcrum inſtar alterius obicis, non inſtar tertiæ potentiæ ſit.

V.

V. *Hæc theoria æquilibrii non differt a viribus respectivis, quas pro caussa æquilibrii plerique olim statuerunt, & multi etiam nunc statuunt.* R. Qui vires respectivas pro caussa æquilibrii habent, ita differunt: si pondera extrema circa fulcrum moverentur, momenta essent æqualia, & opposita; quæ sese mutuo extinguerent: igitur moveri non possunt. In nostra autem theoria non quid futurum esset, sed quid reipsa sit, ostenditur, nempe præsens compositio virium, quas potentiæ agentes exerunt, atque concursus earundem in uno puncto, & oppositio & æqualitas cum tertia potentia. Verbo, nihil in explicando effectu a nobis prætermittitur, quod ratione quadam ad illum concurrit.

VI. *Actio potentiarum, & resistentia fulcri semper æquales sunt, sive potentiæ in æquilibrio sint, sive non sint; quia non potest fulcri resistentia esse maior, vel minor, quam actio potentiarum ob æqualitatem actionis, & reactionis.* R. Æquilibrium non modo æqualitatem virium, sed oppositas earundem directiones præterea poscit. Si potentiarum altera prævalet, fulcrum sine dubio tanta vi resistit, quanta utrinque premitur; sed resistentia non in eo puncto est adplicata, a quo desumtæ distantiæ cum potentiis reciprocant. Quod porro resistentia præcise in hoc puncto adplicari debeat, demonstratur ex eo, quia vis composita potentiarum, & directio tertiæ potentiæ in eadem recta iacere debent; quotiescunque autem in eadem recta iacent, ostendimus, distantias cum potentiis reciprocare; nec sane video, quid ultra requiri a quoquam possit.

VII. *In vecte præter directiones ponderum deorsum, præterea vis & tractio parallela oritur: ergo, cum in explicando quodam effectu omnes vires, quæ concurrunt, spectari debeant, hæc vis parallela prætermitti non potest.* R. d. a. Præter directiones ponderum deorsum oritur vis parallela, si vectis crassitiem quandam, & altitudinem habet c. a. Si simplex linea, eaque rigida ac inflexilis sumitur n. a & c. Si potentiæ ad lineam geometricam concipiuntur adplicatæ, concipi sane potest æquilibrium earundem; sed quænam in tali linea conci-

ci-

cipi potest tractio parallela ? quae tensio superiorum partium, & compressio inferiorum ? quæ gyratio particularum vectis circa alias velut circa axem ? omnia ratiocinia, & experimenta, quæ adferuntur ab iis, qui vim in nexum pro caussa æquilibri statuunt, theoriam vectis rectangularis, adeoque ipsum æquilibrium in vecte supponunt; quemadmodum enim in rectangulari vecte brachium verticale directione horizontali urgetur; sic particulas per altitudinem vectis dispositas instar brachii verticalis sibi repræsentant, quod a vi normali ponderis horizontaliter trahi debeat. Quodnam autem brachium verticale in simplice linea concipient ? atqui in ea certe locum habet æquilibrium; igitur tractio parallela ad rationem æquilibrii non pertinet. At enim non nulli ex consideratione vectis rectangularis tractionem parallelam tanta phantasiæ vivacitate arripuerunt, ut vim ponderum normalem concipere non possint, quin illico tractionem illam parallelam sibi repræsentent. Ponatur igitur hæc vis parallela in omni vecte adesse; quid ea in declaranda æquilibrii caussa momenti denique habet ? fatentur ipsimet eandem ad fulcrum dependenter ab utroque pondere æqualem esse, & in oppositas plagas tendere; atqui secundum generale Mechanices principium, *si duabus vel pluribus potentiis addantur duæ, quæ æquales sint, & contrariæ, eadem prorsus est potentia æquipollens*: si igitur binis ponderibus directione verticali agentibus addantur binæ vires parallelæ, æquales & oppositæ: illorum vis composita, qua in tertiam potentiam agunt, propterea nihil immutatur, perinde ac si non adessent omnino eæ vires parallelæ; recte igitur in exponenda caussa æquilibrii eæ prætermittuntur, quamcunque vectis crassitiem, & altitudinem habeat, ob quam tractio parallela oriri debeat. Sed si in vecte physico (lineam enim pro vecte ideali explodunt, de quo negant differi debere) si, inquam in vecte physico præter normalem actionem ponderum tractio parallela spectanda est, cur vires geminas, quas quodvis pondus exerit, non componunt in vim unicam, quam diagonalis exprimat secundum principia Mechanices ? aut quo pacto, si ea compositio fiat, caussam æquilibrii exponunt ? Dicam sane, quo id

id modo fieri possit. F. V. T. IV. In vecte A B recta P M exprimat unum pondus; recta p N alterum. Hæ vires normales, quoniam usque ad fulcrum propagantur, transferantur in K, ubi fulcrum pono; fiatque K S = P M; K R = p N. Rectæ K m, K n exprimant vires parallelas, quæ dependenter ab utroque pondere ad fulcrum æquales sunt. Vires K S & K m componantur in diagonalem K O; & vires K R, K n in diagonalem K T. Hæ diagonales cum exhibeant vires, queis punctum vel nexus K adficitur ab utroque pondere, denuo componantur in vim K Z ducta T Z æquali & parallela rectæ K O, & O Z æquali & parallela rectæ K T. Erit iam hæc vis composita K Z normalis ad vectem, & parallela directionibus ponderum P M, p N, atque in eadem recta K S; nam vires componentes K O, K T ex utraque parte æqualiter recedunt a perpendiculo nempe intervallo R T = K n, & O S = K m. Deinde vis K Z erit æqualis summæ ponderum, quorum directiones parallelæ sunt; nam K S = P M; & S Z = K R ob triangula O S Z, K R T æqualia; igitur S Z = p N = K R. Ex his perspicuum est, quod tractiones parallelæ & æquales ad fulcrum, nempe K m, K n perinde sint, ac si non essent; cuius rei ratio ex eodem petitur principio, quod supra commemoravi: vires æquales & oppositæ potentiis agentibus P M, p N additæ non mutant potentiam iis æquipollentem K Z, cui dein tertia potentia æqualis, & opposita esse debet. Cui obscura videntur, quæ de concursu parallelarum in distantia infinita diximus (quamquam ea vim omnino geometricam demonstrationis habent) is hac constructione per me utatur, in qua per rectas K m, K n tractiones parallelas æquales ad fulcrum denotare potest. Sed quia hac ratione punctum K non reperitur, sed iam notum esse debet; sic rem adgrediatur. F. VIII. T. IV. ad potentias verticales & parallelas P M, p N addat binas alias æquales & oppositas P m, p n, per quas potentia æquipollens iis potentiis datis, & effectus earundem nihil mutatur. Completis utrinque parallelogrammis diagonales P R, p S producantur ultra punctum concursus O, ut fiat O S = p S; & O r = P R, completoque novo parallelogrammo

mo O T, diagonalis producatur, quæ designabit punctum K, a quo desumtæ distantiæ cum datis potentiis reciprocant; ac reliqua omnia eodem modo se habebunt, ac in demonstratione propositionis I. §. CXIX.

VIII. Auctor opusculi de viribus corporum, & genuino principio æquilibrii Varignonium impugnat, qui, ut refertur in Hist. Acad. Reg. Paris. Ann. 1709, æquilibrium corporum per vectem coniunctorum ab æquilibrio corporum per funes iunctorum explicat eo fere modo, quo id in machina funiculari §. CLVI. exposuimus. *Hoc principium*, inquit Auctor cit. opusculi §. 21. *sua firmitate non careret, nisi ipsum fundamentum aliqua ratione deficeret.* Videamus sane, ubi deficiat fundamentum, & respondeamus ad argumenta Auctoris, quoniam theoria Varignonii re ipsa nostra est. Ait 1. Si (F. XVII. T. III.) funiculus in C fixus sit ad obicem, nulla per hunc funiculum datur communicatio virium, quibus pondera P & p adversus se mutuo agant; sed tota actio uniuscuiusque abit in obicem; at in vecte pondera adversus se mutuo agunt; igitur æquilibrium in vecte hoc modo non exponitur. R. Nemo, qui machinam funicularem, atque æquilibrium potentiarum ponit, funiculos ad clavum immobilem in C alligatos sumit; igitur istuc non est ad rem. Sed, ait 2, si in C loco obicis ponitur trochlea in axe fixa, sed circa axem mobilis, pondus maius e. g. P descendit, minus attollitur teste experientia; & tamen axis fixus vim ponderum æque ac obex immobilis elidere deberet, quia per trochleam pondera in se mutuo agunt, per obicem immobilem non agunt. R. Auctor ponit hypothesin repugnantem; nam pondera sumit inæqualia: fulcrum in centro trochleæ esse vult; & ex sententia Varignonii supponit, eadem pondera esse ut latera parallelogrammi, sive reciproce ut perpendicula ex fulcro seu tertia potentia, nempe ex centro trochleæ in directiones potentiarum deducta; quis ignorat, in trochlea fixa, si fulcrum in centro ponitur, perpendicula in directiones potentiarum, sive in tangentes demissa esse radios æquales trochleæ, ac proinde ipsas potentias *æquilibrantes* inter se æquales esse; si inæquales sumit, directio tertiæ potentiæ per trochleæ centrum non transit; nihil igitur mirum

mirum est, quod æquilibrium deficiat, cum eo casu trochlea instar alterius obstaculi vel impedimenti sit, non instar tertiæ potentiæ (vid. §. CLVI.) quare ratio, cur æquilibrium deficiat, non est communicatio potentiarum; ea enim in usu funium & hypothesi æquilibrii semper ponenda est; quia omnes vires in unum punctum concurrunt; sed ratio est, quia centrum trochleæ non est in directione tertiæ potentiæ, si eædem inæquales sunt. Rem expendenti certum est, æquilibrium Varignonii infirmarii non posse, nisi certa, atque ab omnibus adprobata, constanteque experientia, & Mathesi nixa principia Mechanicæ antea convellantur; quod fieri sane non potest. Cur vim in nexum pro caussa æquilibrii adsumi non posse existimem, his rationibus ducor: 1. quia ea theoria ut exponi solet, æquilibrium in vecte rectangulari ante iam sumit, uti supra indicavi; quapropter hæc vis in nexum corollarium est, non fundamentum statices. 2. In linea æquilibrium potentiarum concipi potest: tractio parallela, gyratio particularum circa axem concipi non potest. Antiquissimi quique Scriptores, qui de re mechanica tractarunt, machinas præsertim simplices, instar dimensionum Geometricarum conceperunt, eosque sequuti sunt Recentiores, qui recta methodo usi in simplicia resolverunt ea, quæ admodum composita occurrunt in natura. Vectes, quos patroni virium in nexum adsumunt, magis compositi iam sunt, quam ut theoriæ stabiliendæ recte adhibeantur. Æqualitatem virium in nexum communem ad fulcrum non nego, eandem etiam adcuratius, quam fieri passim solet, demonstravi §. CLXXXVIII. Eadem virium æqualitas, si cætera abessent, intelligitur ex vecte duplici rectangulari (§. CXXV. n. II.) ubi pondera m, & n, quæ vim in nexum ad fulcrum repræsentant, in casu æquilibrii æqualia esse demonstravi. Sed abrupta hac disceptatione, de potentiis, quibus in quotidiano usu ad machinas movendas, vel in æquilibrio tenendas utimur, non nulla in hoc generali Scholio adnotabo.

IX. Ad machinas potentiarum instar adhibentur primo homines, atque alia animalia. Vis hæc animalis omnium censetur debilissima; quia animalia interposita

quie-

quiete, & alimentis indigent. Curandum, ut homini in usu machinæ situs tribuatur a naturali quam minimum diversus; secus nimis defatigatur. Præterea is maxime situs adpositus est, quo etiam proprio pondere uti queat. Quantæ in humano corpore vires resideant, viri clarissimi de La Hire, Sauveur, Parentius teste Bellidoro Archit. Hydraul. L. I. observarunt. Ac *primo* homo sanus mediocris staturæ, ac roboris, flexis omnino genibus, se ipsum solus absque fulcro in pedes potest erigere; quod cum vi solorum musculorum, qui in pedibus, & femoribus sunt, efficiat, ipsorum vis æquabit pondus totius hominis æstimatum 140 tt. *Secundo*. Cum se homo antrorsum parum inclinat, ac genua modice incurvat, una cum corpore suo pondus 150 tt elevat ad altitudinem saltem 2 vel 3 digit. igitur vis tota musculorum erit = 290 tt. *Tertio*. Si homo ad pondus elevandum duntaxat superiorem corporis partem, quæ a coxis usque ad verticem pertinet, inclinat, una cum pondere superioris partis, quæ 70 tt æquare censetur, elevat præterea 100 tt; proin vis tota in eo situ erit = 170 tt. *Quarto*. Vis brachiorum, etsi optime fuerint adplicata, in trahendo, vel elevando nunquam potest censeri maior, quam 160 tt. Qui extremitatem funis per trochleam ducti, e cuius altero extremo adpensum est pondus, perpendiculariter deorsum trahit, nequit maius pondus elevare, quam 140, quale est pondus proprii corporis, quod cum pondere funi annexo in hoc casu æquilibratur. *Quinto*. Nequit homo vi brachiornm pondus a se removere, nisi se inclinet; inclinatio autem commodissima est sub angulo 60°; ac tum vis hominis, qui directione horizontali trahit pondus, ad libras 27 se extendit; id adcurate observavit D. Sauveur, etsi hominum vires vulgo pluris æstimentur. At valet homo eiusmodi labore distentus ea velocitate progredi, ut intra horam conficiat 519 perticas Rhenanas. Equus operam præstare 7 hominum censetur, ac pondus 189 librarum horizontaliter provehere potest, ita ut intra horam 12000 pedes conficiat; ut adeo effectus maximus ab equo in machina productus dici possit = 189 × 12000 ped. Bos plus virium habet, sed minus celeritatis.

X.

X. *Aer* quoque inſtar potentiæ eſt, ut in propulſandis navibus velorum ope, in circumagendis molis alatis. Sed hæc vis ob perpetuam mutationem ventorum admodum inconſtans eſt. Aere compreſſo, ac ſubito relaxato vim pulveris pyrii imitamur in ſclopeto pneumatico: ſolo oris flatu in veſicam facto magna pondera attollimus. *Aqua* vim potiſſimum exerit in molendinis, & rotis movendis. *Ignis* potentiæ loco habetur in pulvere pyrio, maximos effectus edente præſertim in cuniculis ſubterraneis, & lapidibus e lapicidina eiiciendis. *Pondera* vices potentiæ ſubire nemo non videt; denique & *elaſtra*, præſertim chalybea in movendis horologiis.

SECTIO IV.

De Preſſione, Æquilibrio, & Reſiſtentia Fluidorum.

CAPUT I.

De Legibus Preſſionis, & Æquilibrio Fluidorum.

Quæ ad æquilibrium fluidorum pertinent, de quo Hydroſtatica, ſeu potius Statica fluidorum agit, paucis exponi poſſunt; Eadem tamen maximos & admirabiles uſus tum in humana vita, tum in Phyſicarum rerum expoſitione habent. Fluidum adpello corpus, cuius partes minimæ impreſſioni cedunt, & cedendo facillime moventur inter ſe; Eſt igitur neceſſaria fluidorum proprietas 1. *partium ſubtilitas,* 2. *ſeparabilitas earundem inter ſe,* 3. *ſumma mobilitas. Unde porro fluiditas, ſive complexio iſtarum notarum oriatur, alio loco indagandum eſt, cum in rerum naturam intimius penetrare conabimur, & de viribus elementorum agemus; nunc iſtas proprietates conſtante experientia deprehendiſſe in fluidis, ſatis eſt.*

§. ICC.

Definitio. *Vas uniforme* dicitur, cuius omnes sectiones fundo parallelæ figura similes, & magnitudine æquales sunt; cuiusmodi sunt vasa prismatica, ac speciatim cylindrica. Contra si sectiones fundo parallelæ crescunt, vel decrescunt, vas *difforme* est, idque *divergens*, quando sectiones a fundo versus labrum superius crescunt: *convergens*, si eædem decrescunt. F. VIII. T. IV. Vas A H B est uniforme. F. XIV. Vas A B D C est divergens. F. XVII. Vas A B D C convergens. *Tubi communicantes* sunt, qui duplici vel multiplici constant crure, ita ut fluidum unius cruris transire, vel premere in fluidum cruris alterius queat, quæcunque sit crurum forma, vel capacitas æqualis, vel inæqualis, aut situs rectus, vel obliquus. Sumuntur autem hoc loco eiusmodi tubi, quorum nullum crus capillare, id est, valde gracile, & angustum est. Nam in capillaribus tubis aliæ leges, & phœnomena multum discrepantia obtinent.

Notiones ac formulas de corporum volumine, massa, densitate ac gravitate specifica, pondere individuali exposui Sect. I. C. III.

§. CC.

Propositio I. *Fluidi cuiuscunque stagnantis, sive in permanenti statu positi superficies summa est horizonti parallela.* Ostend. Sit enim (T. IV. F. VIII.) fluidi superficies in situ obliquo C E D. Ducta horizontali A B, erit gutta quæcunque G ita disposita, ac si incumberet plano inclinato G E; eritque guttæ huius pondus absolutum P ad relativum $p = GE : GF$; & $p = \frac{P \times GF}{GE}$; cumque fluida vi naturæ facillime moveantur, ac cuivis impressioni cedant, ac nihil adsit hoc casu, quod impressionem, ac vim relativam p extinguat, ea habebit effectum suum, ac guttam versus E descendere faciet; quod est contra hypothesin fluidi stagnantis. Quare ut fluidum stagnet, recta G F evanescere debet, at tum fiet C D horizontalis, sive horizonti parallela.

§. CCI.

§. CCI.

Corollarium. Fluida semper infimum, quem possunt, locum occupant, sive eo usque descendunt, donec locus descensui non amplius detur. Sunt enim perinde, ut corpora solida, gravitate prædita, cuius directio est perpendicularis ad horizontem, & proxime ad centrum terræ dirigitur; & præterea vi naturæ facillime moventur. Quare si infimum, quem possunt, locum non tenent, ita se habent, ac si plano inclinato incumberent, in quo descensum verticalem ipsum planum sive aliæ inferiores guttæ impediunt, descensum vero obliquum eorum vis relativa necessario obtinet. Hinc dicimus: *fluida sponte se componunt ad libellam, sive ad lineam horizontalem.* Hæc linea horizontalis in minore superficie fluidi est recta: at in superficie maiore, ceu in lacu ampliore, vel in mari est sphærica; sit enim F. IX. tractus maris AB. Si superficies fluidi esset rectilinea, & congrueret cum recta AD; partes fluidi in D altiore loco consisterent, quam in A, magisque distarent a centro terræ C. Quapropter defluerent, ac tamdiu moverentur, donec superficiem convexam a b, & æqualem a centro distantiam obtinerent. Si globus terraqueus constaret partibus solidis homogeneis, & eiusdem ubique densitatis, ac dein fluido homogeneo e.g. aqua ex omni parte immergeretur, cuius directio gravitatis undique ad centrum tenderet, aut si duntaxat eiusmodi fluido homogeneo constaret, is formam exacte sphæricam indueret.

§. CCII.

Propositio. II. *Fluida homogenea, sive quæ eiusdem gravitatis specificæ, & eiusdem ubique densitatis sunt, ita premunt, ut in quavis sectione horizontali pressio sit in ratione altitudinis fluidi incumbentis, & in omnem partem æqualiter propagetur.* Prob.

I membrum. Singulæ particulæ fluidi alias sibi subiectas premunt tota vi, quam habent. Hinc siqua columna verticalis in plures sectiones horizontaliter conci-

cipitur divisa, numerus particularum, ac proin ipsa pressio crescet pro ratione distantiæ cuiusvis sectionis a superficie, id est, pro ratione altitudinis.

II membr. *Pressio fluidorum propagatur in omnem partem, nempe sursum, deorsum, horizontaliter ad latera, & quavis obliqua directione inter verticalem, & horizontalem media.* Probatur 1. ab experientia, quæ est tutissima philosophandi via. Sit F. X. vas D F G H undique clausum, nisi ut in O communicet cum fluido in tubulo A B contento. Ubicunque foramen aperiatur, in fundo circa m n, ad latus in i, in superiore operculo D F in e, fluidum erumpit non modica celeritate teste experientia. Unde argumentum conficitur istiusmodi: fluida pressionem, sive nisum dilabendi exerunt secundum eam directionem, qua reipsa dilabuntur data via, seu aperto foramine; atqui data via, seu aperto foramine dilabuntur quavis directione, non modo verticali deorsum, sed etiam opposita verticali sursum, horizontali, & quovis obliquo situ foraminis. Igitur pressio fluidi altioris in tubulo A B contenti reipsa propagatur in omnem partem; quia actualis motus ceu effectus priori nisui, pressioni, seu determinationi ad motum respondet. Ut ratio physica huius pressionis intelligatur, inprimis spectanda est natura fluiditatis, nempe subtilitas, separabilitas, summaque mobilitas particularum, ob quas affectiones eædem particulæ levissimo impulsui cedunt, factaque pressione, seu impressione eo dilabuntur, ubi minor est resistentia; posita vero resistentia dilabi saltem nituntur. Ista particularum affectio mechanica relate ad pressionem est instar *conditionis* seu *requisiti*, ut aiunt; ea enim vim, ac nisum non exerit. Caussa igitur activa pressionis in omnem partem tum est gravitas, quæ in singulis particulis inest, & vi cuius deorsum nituntur tum verticali, tum obliqua directione, qua per gravitatem singulæ possunt descendere: tum pressio, quam inferiores a superioribus sustinent, & ob quam eadem vi, qua urgentur secundum unam directionem, necessario premunt seu dilabi nituntur secundum quamvis directionem aliam, ob ipsam subtilitatem, separabilitatem, ac mobilitatem, quam habent.

Ea-

Eadem pressio in omnem partem confirmatur plurimis experimentis, quæ passim extant in Physicorum libris; uti si plures simul in fluidum mergantur tubuli, quorum labra inferiora diversas in partes flexa sunt sursum, deorsum, oblique, ad latera, ad eandem in omnibus altitudinem fluidum ascendet; ac siquis tubulus obturato labro superiore in aquam mergitur, ea parum intra tubum attolletur ob aeris resistentiam; aperto autem superius labro mox ascendet, utique ob pressionem partium lateralium fluidi incumbentium, ob quam columna fluidi inferiori labro respondens etiam sursum urgetur, ac data via reipsa movetur. Atque ex his iam binis propositionibus leges æquilibrii fluidorum dimanant.

§. CCIII.

Lex I. *Pressio fluidi in totam sectionem horizontalem, seu fundum horizontaliter situm, est in ratione composita ipsius sectionis seu fundi aut basis, & altitudinis, ac gravitatis specificæ fluidi.* Nam singulæ partes baseos eo magis premuntur, quo maior est densitas seu gravitas specifica fluidi, & altitudo coniunctim; pressio igitur in totam basin eo maior est, quo plures partes habet, quibus eiusmodi columnæ incumbunt, sive quo ipsa basis, aut eius superficies maior est. Sit altitudo fluidi A, gravitas specifica G, basis B, erit pressio in basin $= A \times B \times G$. patet ex theor. gen. §. XII.

Si bases circulares inter se comparantur, eædem sunt ut quadrata diametrorum; si autem fundus est rectangularis, (ut F. XII.) is erit ut factum ex longitudine B C in latitudinem B H. Quæri nunc potest, quomodo determinanda sit altitudo fluidi, si fundus est inclinatus ad horizontem, uti F. XI. fundus A B C D, cuius partibus columnæ inæqualis altitudinis insistunt; præterea quanta sit pressio in latera vasorum, quæ ad fundum horizontalem sunt verticalia; uti quanta sit pressio in latus A B H F vasis B G (F. XII.) cum altitudo fluidi semper crescat, ac proinde etiam pressio ad latera.

§. CCIV.

Lex II. *Si altitudo fluidi in diversis partibus fundi, vel laterum vasis inæqualis est, pressio in totum fundum vel latus vasis est in ratione composita fundi, vel lateris, ac distantiæ centri gravitatis eiusdem a suprema superficie fluidi stagnantis.* Sit F. XI. fundus obliquus ABCD; centrum gravitatis O. distantia centri gravitatis a suprema fluidi superficie K O. Dico, pro altitudine totius fluidi sumendam esse rectam K O, seu distantiam centri gravitatis a suprema superficie fluidi. Nam singulæ partes fundi premuntur pro ratione altitudinis columnæ incumbentis; hinc concipi potest, ac si æqualibus partibus fundi essent adplicata pondera, quæ pro ratione altitudinis seu distantiæ agunt. Quemadmodum igitur summa factorum ex quovis pondere in suam a plano quodam distantiam æqualis est facto ex summa ponderum in distantiam centri gravitatis ab eodem plano (§. CXXXI.) ita erit summa omnium pressionum, sive, pressio in totum fundum æqualis facto ex summa particularum omnium fundi, sive ex fundo in distantiam centri gravitatis a suprema superficie fluidi stagnantis. Similiter pressio in totum latus ad fundum verticale est ut factum ex ipso latere in distantiam centri gravitatis eiusdem a suprema superficie fluidi. Ponatur enim F. XII. sectio verticalis a b lateris ad fundum, & horizontem normalis; crescet a summa superficie fluidi ad fundum pressio, uti crescit ipsa altitudo, sive sectio verticalis, divisa per sectiones horizontales; igitur si pressio lateralis in suprema superficie est $= a$; pressio in latus ad fundum $= A$; habebitur progressio arithmetica: a. 2a. 3a. 4a. 5a. - - - A; cuius singuli termini exprimunt singulas pressiones: summa progressionis summam omnium pressionum in totam sectionem verticalem. Est autem summa progressionis arithmeticæ æqualis facto ex summa termini primi & ultimi in dimidium numerum terminorum, sive in dimidiam altitudinem; ac proin summa pressionum $= \overline{a+A} \times \frac{1}{2} A$. Et quoniam suprema particula non premit ad latus, adeoque primus terminus a relate ad ultimum A est $=0$;

erit

erit summa pressionum in sectionem verticalem $= \frac{1}{2} A^2$. Dicatur latitudo lateris B; erit pressio in totum latus $= \frac{1}{2} A^2 B$, hoc est, uti factum ex ipso latere (quod exprimitur per altitudinem A ductam in latitudinem B) in distantiam centri gravitatis a superficie suprema fluidi, quæ distantia æquat dimidiam altitudinem, seu $\frac{1}{2}$ A. Si fundus ponitur horizontalis, distantia centri gravitatis a suprema superficie fluidi æquat altitudinem cuiusvis columnæ; hinc pressio erit, ut fundus ductus in altitudinem; siquidem gravitas specifica est constans, uti etiam supra posuimus; secus etiam pro ratione gravitatis specificæ crescet pressio. * Universe igitur *pressio sive in latera sive in fundum tam horizontalem, quam obliquum est in ratione composita gravitatis specificæ, lateris seu fundi & distantiæ centri gravitatis lateris, vel fundi a suprema superficie fluidi*; quam quidem distantiam deinceps per altitudinem fluidi denotabimus.

§. CCV.

Lex III. *Fluida in tubis communicantibus cuiuscunque perimetri, figuræ, situs, vel magnitudinis (modo capillares non sint tubi) in æquilibrio sunt, quando gravitates specificæ & altitudines reciprocant.* Sit F. XIII. Altitudo fluidi in crure m = A; gravitas specifica G. in crure n altitudo fluidi a; gravitas specifica g. Concipiatur sectio verticalis c d; cuius magnitudo sit = b. erit tota pressio fluidi in tubo m, quam in sectionem b exerit = A G b; & pressio fluidi in tubo n, quam in eandem exerit sectionem = a g b. Porro ut æquilibrium tueantur fluida, necesse est, ut pressiones in eandem sectionem b æquales sint; si enim aliqua ex parte maior vel minor esset, fluidum alterius tubi descenderet, alterius ascenderet; quare necesse est, ut sit A G b = a g b; & A G = a g; consequenter si fluida in tubis communicantibus in æquilibrio sunt, semper erit A : a = g : G; ac si in utroque crure fluidum homogeneum ponitur, in quo est g = G; erit etiam A = a. Hinc legem istam generalem passim in duas particulares dispertiunt hoc modo: 1. *Fluida homogenea in tubis communicantibus cuiuscunque perimetri, magnitudinis,*

vel situs in æquilibrio sunt, quando ad eandem libellam, vel altitudinem consistunt: 2. Heterogenea vero, si eorum altitudines fuerint reciproce, ut gravitates specificæ.

§. CCVI.

Exercitatio.

I. Obiiciunt. *Pressio fluidorum non potest in omnem partem propagari; si enim fluidum in vase contentum in plures columnas verticales dividitur, pressio primæ columnæ eliditur a latere, & a secunda, pressio columnæ tertiæ a secunda, & quarta; igitur tertia columna non agit in primam, ac proinde eiusdem pressio non propagatur in omnem partem; præterea si quod ponitur vas divergens (F. XIV.) pressio columnarum lateralium m n, o p excipitur a lateribus A B, C D. ergo pressio earundem non propagatur in omnem partem.* R. n. a. Rationem additam d. pressio eliditur, id est, motus actualis impeditur posito æquilibrio c. ipse nisus ad motum propterea cessat, n. eo ipso, quia nisus ad motum in omnem partem æqualis exeritur in eadem sectione horizontali, impeditur motus, & æquilibrium oritur; quapropter spectata natura, & gravitate fluidorum quævis columna verticalis intermedia immediate in vicinas, ac mediate etiam in alias remotiores premit, ceu tertia in primam, hæc in tertiam, quarta in secundam, & ita porro, ut pressio cuiusvis in omnem partem propagetur, quia quævis omni parte difflueret, si dilabendi via daretur. Nec vero adcurate loquuntur ii, qui in vase divergente columnas laterales, quæ ad fundum non pertingunt, a lateribus ita excipi dicunt, ut in fundum non premant; si enim fluida, ut iidem statuunt, in omnem partem premunt, sane concipi potest, ac debet, columnam m n etiam premere versus D, & columnam o p versus B.

II. *Motus secundum diversas directiones eodem tempore naturaliter dari non potest, multo etiam minus versus omnem partem: igitur neque nisus ad motum.* R. Motus secundum diversas directiones, seu qui in lineis & plagis diversis fieret, replicationem posceret, quæ supra

natu-

naturæ vires est: at nisum in diversas partes in eodem corpore posse concipi, ipsum æquilibrium quarumvis virium ostendit, uti siquod corpus eadem directione & vi, qua deorsum nititur, sursum urgeatur a potentia quadam. Nec vero, si posito æquilibrio motus impeditur, propterea nisus ad motum ullo tempusculo, quod concipi potest, cessat, cum actio gravitatis, & aliarum præterea virium sit continua.

III. *Ex diversis directionibus, & pressionibus oriri debet nisus ad motum per quandam diagonalem; igitur concipi non potest pressio in omnem partem.* R. d. a. Siquod corpus diversis directionibus simul impulsum reipsa motum obtinet, is per quandam diagonalem fit, c. a. ipsæ vires componentes, & diversæ impressiones seu pressiones propterea cessant impedito actuali motu n. a. Si pressio in omnem partem eiusdem sectionis horizontalis æqualis non foret, particulæ fluidorum ob ipsam subtilitatem, separabilitatem, ac mobilitatem eo diffluerent, unde minorem resistentiam sentiebant, quod est contra hypothesin æquilibrii, & stagnationis. Illud animadverto; concipi non potest, particulas fluidi in quodam vase contenti ita sibi incumbere, ut directio pressionis adcurate per centra singularum in eadem verticali sectione transeat, uti id quorundam exemplo F. XV. exhibetur; Nec vero si unus globulus binis incumbat, eosque oblique premat, ut in vase medio Q, propterea hæ directiones obliquæ in unam componendæ, & pressiones singularum particularum ad calculum revocandæ sunt; quod humanum ingenium longe superat. Sed cum incredibilis sit particularum cuiusvis fluidi subtilitas; hinc columna quædam in plures sectiones horizontales divisa concipiatur, quarum superiores in inferiores agunt eo modo, quo, si fluidum ponatur expers gravitatis, sed huius loco premi ab intruso pistillo, id in vasis latera interna, & quaquaversum ita urgetur, ut ubicunque aperiretur apertura, fluidum per illam ob pressionem pistilli prorumperet, quamvis pressio pistilli duntaxat deorsum unica directione agat. Quod pressio pistilli; idem gravitas cuiusvis sectionis horizontalis relate ad sectionem inferiorem efficit; etsi enim ex vi absoluta duntaxat deorsum agat; tamen ex hac vi pres-

ſio in omnem partem oriatur neceſſe eſt ob ipſam naturam fluidi. Cæterum non eſt prætermittendum, fluida, perinde ut quævis alia corpora, ſi a deſcenſu verticali prohibentur, directione quavis obliqua deorſum ad deſcenſum niti.

IV. *Si preſſio fluidorum quaquaverſus propagatur, conſequi videtur, ſingulas partes fundi, vel ſectionis cuiusdam horizontalis maiore vi premi, quam pro ratione altitudinis columnæ incumbentis: igitur preſſio in omnem partem, & preſſio pro ratione altitudinis una non ſubſiſtunt. a. pr. Sola columna directe incumbens, quæ datæ parti fundi reſpondet, iam premit pro ratione altitudinis, etſi abeſſent aliæ columnæ laterales: ergo, ſi hæ quoque in omnem partem, ac proinde in datam partem fundi premunt, preſſio fiet maior, quam in ratione altitudinis columnæ incumbentis; quando enim plures agunt cauſſæ, vel una maior, effectus maior ſit, neceſſe eſt.* R. n. a. ad prob. d. a. Sola columna directe incumbens iam premit pro ratione altitudinis, ita, ut non modo verticaliter deorſum, ſed verſus omnem præterea partem, atque eam quoque, unde aliæ urgent columnæ laterales, premat, c. a. ut duntaxat premat in partem fundi ſibi reſpondentem, n. a. & c. Ut res tota adcurate percipiatur, expendendum eſt principium evidens Mechanicæ: *Si duo corpora mediante tertio æqualibus viribus ſibi mutuo obnituntur, corpus intermedium tantundem premitur, aut comprimitur, ac ſi illud ab alterutro extremorum in obicem immobilem urgeretur.* Nam quodvis extremorum reſpectu alterius pariter extremi ſe habet inſtar obicis immobilis, quia totam alterius vim ſuſtinet. Concipiantur iam (F. XVI.) bini tubi communicantes, alter erectus, alter inclinatus; dico: preſſio in communem eorum baſin C non eſt maior, quam foret a fluido in ſolo tubo verticali contento; nam ſectio infima tubi verticalis ſeu particulæ fundo proximæ a fluido tubi verticalis æqualiter premuntur verſus omnem partem, adeoque etiam verſus columnam tubi inclinati; conſequenter ea ſectio infima, ſive particulæ fundo proximæ ita ſe habent, ac corpus, quod inter alia duo viribus æqualibus ſibi obnitentia medium eſt, ut adeo eæ particulæ æqualiter premantur ac premant, ſive directione obli-

obliqua opponatur latus vasis instar obicis immobilis, sive opponatur pressio columnæ inclinatæ, quæ columnæ verticali per intermediam eam sectionem infimam obnititur. Quapropter cum pressio in basin proxime oriatur a pressione sectionis infimæ, sive particularum fundo proximarum, consequens est, pressionem in communem basin tuborum communicantium non maiorem esse, quam si ea a sola columna directe incumbente proveniret, quemadmodum ea foret absente tubo inclinato. Porro quod in tubis communicantibus contingit; idem fieri debet in vase unico, ubi fluidum in plures columnas verticales & obliquas divisum concipi potest. Nam quævis pars fundi in quovis vase spectanda est ceu basis communis plurium tuborum communicantium, sive plurium columnarum, quarum una directa, reliquæ vero obliquæ sunt, quia pressio a gravitate oritur, & partes fluidi quoad gravitatem suam, ac vim eodem modo se habent, sive tubo conclusæ sint, sive aliis columnis circumfusæ. Quamobrem ut concludam denique hanc expositionem, non modo columna directe incumbens, sed omnes præterea laterales in quamvis fundi partem premunt, nec tamen pressio maior est, quam si sola columna directe incumbens reipsa premeret.

V. *In vase divergente A B C D (F. XIV.) necessario maior est pressio, quam in vase uniformi a B c D eiusdem fundi B D, & altitudinis perpendicularis a B. Ergo pressio non crescit pro ratione fundi & altitudinis. a. pr. In vase divergente maior fluidi quantitas continetur, quam in vase uniformi eiusdem basis, & altitudinis; igitur in illo pressio necessario maior est, quam in isto.* R. n. a. Si de pressione in fundum est sermo. Ad pr. c. a. n. c. ac suppositum, quod pressio fluidorum sit in ratione quantitatis seu massæ in vase contentæ; supra enim demonstravi, pressionem pro ratione altitudinis, non copiæ fluidi crescere. Cur autem pressio in fundum B D vasis divergentis non sit maior, quam in vase uniformi, apertissime intelligitur ex iis, quæ superiore numero de tubo erecto & inclinato dicta sunt; nam in communem eorum basin pressio non est maior, quam in ratione altitudinis perpendicularis, etsi utraque columna premat. Non dicendum igitur in eiusmodi vase,

pres-

pressionem columnarum lateralium m n, o p a lateribus A B, C D, vel a columna a B c D elidi, quia columnæ laterales revera etiam oblique versus B & D in fundum premunt, quin ea pressio impediatur, elidatur, vel cesset.

VI. *Si fluida pro ratione solius altitudinis, & basis premunt, sequitur, ut, si cylindro unum pedem alto inseratur tubulus angustior 4 pedum, fundus illius æque prematur, ac si totus cylinder 5 pedes altus fluido repleretur. Id vero a ratione, & experientia abhorrere videtur.* R. d. Sequitur, ut fundus æque prematur, ac si totus cylinder 5 ped. altus fluido repleretur, si fundus est mobilis, & cum lateribus cylindri non cohæret, c; si fundus cohæret cum lateribus, atque unum velut continuum cum iis efficit, n. Si fundus mobilis est, reipsa pressio ab inserto tubulo oritur tanta, quanta in vase uniforme eiusdem fundi, ac 5 ped. alto existeret, uti experimenta Physicorum, ac inprimis Gravesandii exhibent, ut adeo parva fluidi quantitas ad debitam altitudinem elevata æquilibrium tueri cum multo maiore copia eiusdem fluidi queat. At si fundus, & latera vasis cohæreant, non maior oritur pressio, quam quæ massæ fluidi contenti respondeat; nam vis illa, quæ a pressione pro ratione altitudinis oritur, excipitur, ac sustentatur a nexu, quo fundus cum lateribus vasis cohæret, eo fere modo, quo vis elastica aeris in pilam lusoriam intrusi a partibus vesicæ sustentatur, ut adeo pila, nisi comprimatur, non maiorem vim, aut maius pondus exerat, quam quod massæ continentis, & aeris contenti respondet.

VII. *In vase convergente A B D C (F. XVII.) multo minor est copia fluidi, quam in vase uniformi a B c D eiusdem altitudinis, & fundi B D; ergo vel pressio non est in ratione altitudinis, & fundi, vel in utroque vase æqualis est; quod paradoxum videtur.* R. Si fluidum in utroque vase est homogeneum, altitudo utrinque eadem, & fundus idem, seu æqualis, sine dubio pressio eadem est, quæ uti paullo ante dicebam, minime a copia fluidi pendet. Non nulli de eiusmodi vase convergente ita disserunt: columna media A F C E, cuius maxima est altitudo, directe premit in partem fundi sibi responden-

tem

tem FE, & indirecte etiam versus latera ubique pro ratione altitudinis, ut adeo in sectione horizontali op premat pro altitudine Cp, & quidem versus omnem partem e.g. versus m, ut adeo particula m prematur pro altitudine Cp, ac dein fundus in n pro altitudine Cp + mn = Cp + pE = CE, id est pro altitudine fluidi. At enim, si naturam fluidi, & pressionem in omnem partem recte expendimus, dicendum, columnam mediam AFCE non modo in partem fundi FE, sed etiam versus B, D & omnes intermedias partes vel directe, vel oblique vi gravitatis premere, ita, ut quantitas pressionis semper respondeat altitudini perpendiculari fluidi. Eodem modo pressio fluidi in tubo AB contenti (F.X.) non tantum directe propagatur per Oi, sed versus omnes partes, & latera vasis, versus c, m, n, f &c. quod quidem ex natura fluiditatis, nisi fallor, omnino perspicuum est. Cæterum recte Krafftius in Prælect. Acad. P. II. §. 101, si, inquit, obiiciatur, quod vas convergens non tantum ponderet, ac uniforme eiusdem basis & altitudinis; distingui debet inter actionem fluidi, & pondus.

VIII. *Si foramen aperitur in fundo vasis, columna fluidi foramini directe respondens cavitatem quandam in suprema superficie relinquit; igitur in singulas partes fundi duntaxat columna directe respondens, non item aliæ laterales premunt.* R. c. a. n. c. ratio eius cavitatis esse potest, quia columna directe respondens gravitate absoluta, ac proinde maiore celeritate erumpit, quam aliæ oblique prementes vi relativa. Verum, ut Cel. Paullus Frisius de gravit. omnium corporum in Schol. L. I. C. II. inquit, *cum ea, quæ fluidorum æquilibrium respiciunt, paucis comprehendi possint; quæ ad motum eorundem pertinent, non nisi hypothesibus perstricta, dubia & incerta sunt. Universe manifestum est, quod in motibus corporum determinandis eo sunt complicatiora problemata, quo plura sunt corpora in se agentia: & cum contiguæ fluidi particulæ motu, & pressione omnes agant in se invicem, patet, problema, quo motus particularum earundem inter se quæritur, Geometriæ, & analyseos vim superare.* Non possunt igitur ex incertis, valdeque dissimilibus de motu fluidorum phænomenis certissimæ pressionis, & æquilibrii

brii eorundem leges impugnari. Atque ob hanc maxime caussam de natura pressionis diligentius disceptavimus, ut ea cognita difficultas explicandi motus fluidorum, ac incertitudo diversarum hypothesium citius intelligeretur.

IX. *Si in tubis communicantibus inæqualis perimetri* (*F. XIII.*) *ac primo in tubo angustiore novum fluidum affundatur, ut in eo liquor supra libellam AB primo emineat, intelligi non potest, quomodo a columna tenuiore columna maior amplioris tubi attollatur; tota enim simul elevari non potest, quia tenuior columna tantas vires non habet ad totam massam tubi amplioris commovendam. Nec vero aliqua tantum pars, quæ columnæ graciliori respondet, in ampliore tubo elevatur; si enim novum fluidum sit coloratum, ut a reliquo distinguatur, id teste experientia non directe ascendit per tubum ampliorem, sed circa communem sectionem verticalem diffunditur.* R. Per sese, si novum fluidum leniter, ac sine impetu infunditur, tota massa tubi amplioris simul elevatur, quia aucta pressio columnæ gracilioris quaquaversus diffunditur; non enim a maiore, vel minore copia fluidi, sed ab altitudine eiusdem quantitas pressionis pendet; ac levis quantitas fluidi ingentibus ponderibus elevandis par est, uti ex dictis satis perspici potest, quemadmodum ob eandem pressionis legem gracilior columna cum ampliore in æquilibrio est.

CAPUT II.

De Immersione, & motu libratorio corporum solidorum in fluidis.

Ex Legibus pressionis fluidorum haud ægre deducitur, quid corporibus fluido immersis eveniat, quanta nimirum parte mergantur, quanta vi descendant, vel ascendant intra fluidum, seu quanta ponderis eorum pars æquilibretur cum fluido; quæ quidem ante prætractanda videntur, quam usus & adplicatio Hydrostatices legum exhibeatur.

§. CCVII.

§. CCVII.

Propositio. *Siquod solidum grave fluido immergitur, tantam ponderis sui partem amittit, quantum est pondus voluminis fluidi a solido extrusi.* Nam solidum grave nequit immergi fluido, nisi volumen fluidi par volumini partis mersae suo loco extrudatur; Quemadmodum ergo pondus voluminis extrusi antea sustentabatur a reliquo fluido; sic substituto in eius locum solido tantundem de eius pondere deinceps sustentabitur; hanc ergo ponderis partem quodammodo amittit solidum, ita ut per eam neque descendat infra fluidum, neque in aliud corpus, ex quo suspensum tenetur, agat, sed duntaxat in fluidum premat, & cum eo aequilibretur, uti antea premebat volumen fluidi exclusum. Hinc iactura ponderis, quam patitur solidum immersum, accrescit ponderi ipsius fluidi; id quod vel ex sola aequalitate actionis, & reactionis, nec minus ab experientia manifestum est; si enim vas aqua repletum lanci imponatur cuiusdam librae, & aquae immergatur solidum specifice gravius ope setae equinae libere a manu, aliove sustentaculo extraneo pendens, nec fundum attingens, atque ita in aequilibrium redigatur cum pondere opposito; observamus aequilibrium illud corpore extracto destrui, nec restitui, nisi tantundem affundatur aquae, quantum est volumen solidi immissi; quod indicio est, partem ponderis, quae solido decedit, accrescere aquae.

Ex hac propositione leges immersionis fluunt.

§. CCVIII.

Lex I generalis. *Solidum grave eo usque immergitur in fluido, donec volumen fluidi extrusi pondere sit aequale toti solido.* Cum enim tantam praecise ponderis partem amittat, quantum est pondus voluminis extrusi; eo usque habebit partem quandam ponderis sui residuam, per quam profundius mergatur, donec volumen fluidi extrusi pondere toti solido aequale sit.

§. CCIX.

Lex II. *Si ſolidum eiusdem ſit gravitatis ſpecificæ cum fluido, infra illud mergitur totum; omne pondus ſuum amittit, & quocunque loco infra fluidum callocatur, perſiſtit immotum.* Nam eousque mergitur, donec pondera ſolidi totius, & voluminis extruſi ſint æqualia; ſi gravitas ſpecifica eadem eſt, pondera nunquam æqualia ſunt, niſi & volumina ſint æqualia; igitur volumen extruſum par eſt volumini ſolidi immerſi; h. e. id mergitur totum; Ex quo ipſo patet, totum ab eo pondus amitti; quia pondus voluminis extruſi & corporis merſi idem eſt in hac hyp. Et quia ſolidum eodem prorſus modo ſe habet, ac volumen fluidi, cuius locum occupat, idcirco quovis loco ſubſtitui poteſt pari volumini fluidi ſalvo æquilibrio.

§. CCX.

Lex III. *Si ſolidum ſpecifice levius ſit fluido, aliqua ſolum parte mergitur; totum vero pondus amittit.* Nam ſi ſolidum ſpecifice levius, ac proin fluidum ſpecifice gravius, minus volumen fluidi pondere adæquat totum ſolidum; cum igitur eo usque fiat immerſio, donec pondera totius ſolidi & voluminis extruſi ſint æqualia, ea æqualitas obtinetur, etſi volumen extruſum minus ſit volumine totius ſolidi, h. e. etſi non mergatur totum; & quoniam pondus a ſolido amiſſum æquale eſt ponderi voluminis fluidi ab eo extruſi; perſpicuum eſt, quod totum ab eo pondus amittatur.

§. CCXI.

Lex IV. *Si ſolidum ſpecifice ſit gravius fluido, illud mergitur totum, ſed partem duntaxat ponderis amittit.* Hoc enim caſu volumen fluidi extruſi, etſi æquale ſit volumini totius ſolidi, ſemper minoris ponderis eſt, quam ſit pondus ſolidi; cum igitur eo usque fiat immerſio, donec pondera corporis merſi, & voluminis extruſi ſint æqualia, illud perpetuo mergetur, & deſcendet, donec fundum attingat. Et quia pondus fluidi extruſi

in

in hac hyp. nunquam æquale eſt ponderi totius ſolidi, idcirco totum pondus ab hoc amitti non poteſt. Pondus, quod corpus liquido immerſum ſervat, vocatur illius *gravitas reſpectiva*, quæ proinde eſt exceſſus gravitatis ſpecificæ ſolidi ſupra gravitatem ſpecificam fluidi.

CAPUT III.

De Adplicatione Legum preſſionis, ſive de Phænomenis a preſſione fluidorum pendentibus.

Principia, ac leges preſſionis fluidorum paucis verbis complecti, unaque omnes coniungere ſtudui, ne expoſitione Phœnomenorum, quorum maxima copia, & varietas eſt, diductionem earundem identidem interpolare cogerer. Nunc vero præpoſitis iis velut fundamentis de ordine, quo Phœnomena recenſebo, magnopere laborandum non eſt.

§. CXCII.

Sipho Anatomicus. F. X. Wolfius vaſi D F G H e lamina confecto tubulum A B ferruminatione coniunxit. Diameter vaſis erat 48 lin. tubuli 11 lin. altitudo A E 250 lin. loco operculi ſuperioris D F veſicam arcte circumligavit; aquam dein per A infundens usque ad ſummitatem tubuli A deprehendit, pondus 30 libr. ſuperficiei D F incumbens in æquilibrio cum fluido ad altitudinem A E elevato conſiſtere, initoque calculo detexit, idem hoc pondus eſſe voluminis aquei, cum baſis eſſet eadem cum vaſe lamineo G H, & altitudo A E. Inde inſtrumentum ad uſus anatomicos, a quibus nomen traxit, adaptatum eſt; cum enim corporis animalis partes quædam ex variis pelliculis, & membranis coaleſcant; hinc, ſi eædem ſuperne in D F circumligentur, ob preſſionem fluidi fit, ut exiliſſimæ fibrillæ, & tenuia vaſa ſanguinis ac lympharum in tenerrimos diviſa ramos, ac univerſa filaminum textura oculis diſtincte ſub-

subiiciatur. Hinc vero intelligitur, fluida in omnem partem, atque etiam sursum premere; ut si longitudo fundi ponatur 3 ped. latitudo 2 ped. erit fundus 6 ped. quadratorum; sit altitudo aquæ incumbentis 4 pedum; erit pressio in fundum ut $6 \times 4 = 24$; h. e. totidem pedes cubici fluidi in eam basin prement; & si pes cubicus ponatur $62 \frac{1}{2}$ libr. facili multiplicatione reperitur pressio in totam basin.

§. CCXIII.

Pressio in latera. Sit vas prismaticum quadrangulare A B C D G F (F. XII.) Eius altitudo $AB = a$; lateris A B F H, eique oppositi latitudo A F, vel B H vel $CI = b$; erit ex §. CCIV. pressio in latus $= \frac{1}{2} a^2 b$, & in utrumque latus oppositum simul $= a^2 b$. Sit dein lateris A B C D longitudo B C $= c$; erit pressio in hoc latus, eique oppositum & æquale, simul $= a^2 c$; pressio denique in fundum $= abc$. Quodsi iam istiusmodi vas ponitur cubicum, in quo $a = b = c$; erit pressio in 4 latera verticalia $= 2 a^3$, & in fundum pressio $= a^3$; consequenter pressio in fundum, & latera simul sumta ad pressionem in fundum solum, erit ut $3 a^3 : a^3 = 3 : 1$. Quare illud colligitur, quod Musschenbroeckius animadvertit: ex actione gravitatis fluidi oritur pressio triplo maior, quam ex actione sola gravitatis in corpore firmo, quod vasi cubico inclusum in solum fundum, non item in latera premit vi ponderis sui. Cera frigida & firma adimplens vas cubicum minus operatur in omnes vasis parietes, quam cum ab igne refusa est; quod item de metallis quoque firmis ac fluidis asseverari potest. De aqua, & glacie ob alias caussas aliud testatur experientia. Sit agger seu crepido aquæ opposita; eius longitudo sit 20 ped. altitudo, ad quam aqua ascendit, $= 5$ ped. Quæritur, quanta vi aqua premat in aggerem? nempe in ratione composita gravitatis specificæ aquæ, & totius baseos, cui aqua incumbit, quæ hoc casu est 100 ped. quadratorum, ac distantiæ centri gravitatis a suprema superficie fluidi; quæ erit dimidia altitudo aquæ seu $2 \frac{1}{2}$ ped. erit igitur ratione huius di-

stan-

ſtantiæ preſſio $= 250$. qui numerus indicat pedes cubicos aquæ in aggerem toto pondere prementes; & ſi pes cubicus ponatur $62\frac{1}{2}$ libr. erit vis preſſionis $= 250 \times 62\frac{1}{2} = 15625$ libris. Nec vero ſi ſola preſſio aquæ ſtagnantis ſpectetur, amplitudo eiusdem ſpectanda eſt; ut perinde ſit ſive maiori ſive minori ſtagno opponatur agger. Patet etiam ex dictis, amplitudinem vaſis, aut copiam fluidi in eo contenti non augere preſſionem, niſi altitudo creſcat. Addendum hoc loco exemplum de preſſione in circulum, & ſuperficiem ſphæræ. Sit radius dati circuli r; ratio diametri ad peripheriam $=$ d : p; erit peripheria dati circuli $= \frac{2pr}{d}$; nam d : p $=$ 2 r : $\frac{2pr}{d}$. Ex elem. circulus ſive area reperitur, ſi peripheria ducitur in dimidium radium; igitur area $= \frac{2pr}{d} \times \frac{1}{2} r = \frac{pr^2}{d}$. Sit iam diſtantia centri circuli (quod eſt centrum gravitatis lateris vel baſis circularis) a libella, vel ſuprema ſuperficie fluidi $=$ a; erit preſſio fluidi in circulum $= \frac{apr^2}{d}$. & quoniam ſuperficies ſphæræ eſt quadrupla circuli maximi, erit poſitis iisdem ut antea, preſſio fluidi in ſphæram radii r $= \frac{4apr^2}{d}$. Si enim ſphæra fluido immergitur, latus preſſum eſt tota ſuperficies ſphærica: centrum autem gravitatis eſt ipſius ſphæræ centrum. Haud igitur recte computatur a non nullis preſſio in ſphæras e. g. in hemiſphæria Magdeburgica per altitudinem fluidi in ſimplicem circulum maximum, quando nec fluidum, nec ſphæra moveri ponitur.

§. CCXIV.

Pressio in tubos inclinatos. Ex iis, quæ de natura fluidorum, ac legibus pressionis supra disputata sunt, satis, ni fallor, colligitur, pressionem in ratione altitudinis crescere, quoscunque situs, aut flexus habeant vasa; idcirco etiam in tubis inclinatis pro altitudine perpendiculari crescit pressio. Et quoniam particulæ fluidorum subtilissimæ sunt, sibique maximo numero præsertim in tubo non capillari incumbunt; hinc non potest fluidum tubo inclinato contentum instar corporis solidi spectari; cuius gravitas absoluta est ad relativam, ut longitudo plani inclinati ad altitudinem; sed columna inclinata (F. XV.) in plures sectiones horizontales animo & cogitatione dividenda est, ita, ut pressio in prima sectione sit ut altitudo o r in 2 ut o r + m n & in ultima ut altitudo tota D E, quiscunque sit numerus particularum. Hinc intelliguntur scaturigines multorum fontium, & derivationes aquarum; nam aqua ex loco edito decurrens intra tubos, ad æqualem prope ei, ex qua delapsa est, altitudinem attollitur; ac fieri potest, ut ea tuborum coniunctorum ope ex loco sublimi ad humiliorem derivetur per anfractus quoque collium, & vallium interiectarum, modo vertices collium ad eam altitudinem non assurgant, quam fons ipse obtinet. Cum vero pressio pro ratione altitudinis semper crescat, tubos inferiores vi pressionis, nisi admodum solidi sint & firmi, sæpe disrumpi videmus. Spectata enim vi pressiva in planum inclinatum aliter de fluidis corporibus, aliter de solidis disserendum est; in his enim directio vis prementis ex centro gravitatis in planum normalis est, neque alia præterea datur vis in planum premens; at fluida secundum omnes directiones premunt, & urgentur æqualiter; hinc pressio in latera canalis inclinati æquatur vi, qua fluidum in data quavis sectione horizontali a particulis superioribus urgetur, estque hæc in ratione altitudinis. Ratio disparitatis ex ipsa solidorum, ac fluidorum natura dispari petenda est; corpora enim solida ob ipsam *partium connexionem* coniunctim premunt, atque ita, ac si tota

maf-

massa in centro gravitatis esset collecta; fluida autem, cum eorum partes facile separabiles sint, & cuivis impressioni cedant, mox in omnem partem conantur dilabi, id est, premunt.

§. CCXV.

Pressio fluidorum heterogeneorum. Si fluida heterogenea in se agunt, lex generalis æquilibrii poscit gravitatum, & altitudinum rationem reciprocam. Ita capto tentamine deprehendit Wolfius, altitudinem Mercurii esse ad aquæ altitudinem, ut 36 : 492 seu ut 3 : 41 = 1 : 13 $\frac{2}{3}$. Ex quo inversa ratio gravitatis specificæ colligitur, scilicet aquæ ad Mercurium ut 1 : 14 circiter, id quod aliorum experimentis vulgo compertum est. Sicut autem corpora solida specifice leviora in fluidum gravius mersa supernatant: specifice graviora descendunt; sic fluidum specifice levius leniter affusum graviori supernatabit, velut oleum terebinthinæ aquis, aqua mercurio. Hinc originem habet vitrum *elementare* dictum, quod est cylindrus tenuis repletus quadam parte limatura ferri, aut contuso vitro, cui affusum est oleum tartari per deliquium, spiritus vini coloratus sale tartari, & petroleum. Hæc enim fluida, quorum alterum altero levius est, vitro inverso permixta, separantur dein, & quodvis suum locum recuperat restituta quiete. Hoc experimento explicare conantur quidam, qua ratione chaos confusum ex quatuor elementis potuerit separari, & ad quemdam ordinem pervenire, ut singula distincta adparerent. Verum hæ leges fluidorum heterogeneorum non paucas anomalias habent. Nam fluida quædam, si gravitate non multum differant, facile inter se permiscentur, uti aqua, & vinum, aut spiritus vini. Hæc commixtio præpeditur, si ima tubi pars impleatur fluido graviore, quod aliorum binorum gravitatem superet, & cum neutro commisceatur; cuiusmodi est mercurius; eique dein ex utraque parte fluidum heterogeneum affundatur. Quædam fluida, si commiscentur, effervescunt; quædam minus voluminis post commixtionem exhibent, quam summæ utriusque debeatur, uti fit in spiritu vini, & aqua mixtis inter se;

obſervata enim eſt voluminis diminutio $= \frac{1}{20}$ voluminis ſpiritus vini, ſi huius capiatur pars una, illius duæ. Cauſſa phœnomeni eſt, quod alterum fluidum in vacua interſtitia alterius recipiatur, & quodam modo abſorbeatur. Cur particulæ corporum graviorum ceu ſalis, cupri, argenti &c. in fluido ſpecifice leviori non mergantur, attractioni adſcribemus ſuo tempore. Illud tamen ex preſſione fluidorum videtur conſequi, eiusmodi particulas, ſi a fluido teneantur attractæ, ac ſuſpenſæ, per omnes fluidi columnas, totamque maſſam æquabiliter diſtribui debere. Ad fluida heterogenea pertinent, quæ comprimi poſſunt, ac in diverſa altitudine diverſam habent denſitatem; quale eſt ſolus aer inter fluida, quæ conſtringi aliquo vaſe poſſunt, & experimentum admittunt. Maior igitur eſt aeris compreſſio ac denſitas in locis humilioribus, minor in altioribus; nec ex inverſa ratione gravitatis ſpecificæ, & altitudinis ipſa altitudo tum determinari poteſt. Reliqua fluida nulla vi ſenſibiliter comprimi, & in anguſtius ſpatium redigi poſſunt, quod experimento Florentinorum compertum eſt. Aqua enim intra ſphæram cavam preſſa per vim externam adeo comprimi non potuit, ut per poros auri maxime denſi potius penetrarit, & inſtar roris in ſuperficie externa adhæſerit. Animadverte hoc loco 1. Ex iſto experimento mira, & incredibilis ſubtilitas particularum aquæ colligi poteſt, quæ per tenuiſſima interſtitia metallorum tranſit. 2. Id ipſum experimentum non niſi adhibita ſphæra capi potuit, cum ſphæra præ quovis alio æquali volumine plurimum materiæ in ſe complecti poſſit; hinc facta compreſſione, vel contuſione ſpatium internum, in quo fluidum continebatur, minui debuit, augeri non potuit, uti ex Elem. conſtat.

§. CCXVI.

Preſſio virium extranearum in fluida. Si fluidum, quod comprimi & condenſari nequit, vaſi firmo incluſum vi externa premitur, atque urgetur, omnes illius partes undique premuntur æqualiter, nec ulla earum ab hac preſſione motum recipit; motus enim in hac hypo-

potheſi concipi non poteſt, niſi particula una vel plures comprimantur, & condenſentur; ponuntur autem particulæ, quæ comprimi, & condenſari nequeant; & quia preſſio fluidorum in omnem partem propagatur; hinc omnes fluidi partes a vi externa *æqualiter* ex omni parte afficientur. Si fruſtum ceræ mollis (inquit Graveſandus in Elem. Phyſices L. II. C. III.) figuræ irregularis, cum ovo veſicæ aquis repletæ includitur, & veſica exacte clauſa pyxidi æneæ inſeritur, atque hæc operculo obtegitur, ita, ut a veſica ſuſtineatur; pondus 70, aut 80 librarum impoſitum, neque ovum franget, neque ceræ figuram ullatenus immutabit; propterea quia preſſio ex omni parte æqualis eſt, ita ut illius vis in punctum aliquod corporis directa aliam æqualem, & oppoſitam habeat ex altera parte. Uti vero omnes partes fluidi æqualiter afficiuntur vi externa, ita eidem æque omnes reſiſtunt. Ob hanc cauſſam fit, ut aquam ſtagnantem non niſi inſigni dolore vola manus percutiamus: aſſerem aquæ innatantem eadem facilitate ſecuri findamus, ac ſi fulcro duro incumberet. Hinc globi plumbei oblique in aquam emiſſi e bombarda, plani efficiuntur ab ictu, & lapides ita iniecti reſiliunt, ceu ab obice immobili; hinc etiam modica aquæ portio, tubo vitreo, aere maximam partem vacuo incluſa, inſtar plumbi ad fundum allidi ſentitur, unde ei *mallei aquatici* nomen inditum eſt; hinc denique phiala vitrea, aquis plena intruſo per vim extraneam ſubere diffringitur. Quod piſces, aut homines navi onerariæ maximi ponderis ſubnatantes, magnopere non premantur, mirum non eſt; non enim navis, vel quodcunque corpus ſupernatans fluido, maiore vi in ſubiectam columnam premit, quam volumen fluidi excluſum antea premebat. Ex æquali hac fluidorum preſſione intelligi aiunt, cur homo pondus aeris ſibi incumbens, quod teſte Krafftio non minus, quam 43240 librarum eſt, ſine incommodo ferat. At nempe aer in ipſis partibus mollibus, ac ſpongioſis corporis animalis contentus eadem vi, qua externus premit, undique reſiſtit. Aucta præter modum preſſione externa ſane incommodum ſentiri urinatores teſtantur, de quibus infra diſſeremus; ipſo Krafftio teſte in Præl. Acad. P. I. §. 307. machina excogitata eſt, cuius ope

in aqua vehementer compressa pisces eidem innatantes moriuntur; cuius ratio sequente §. illustrabitur.

§. CCXVII.

Pressio fluidorum in solida immersa. Omne solidum fluido immersum ab eodem premitur ex omni parte, ac quidem pro ratione altitudinis, seu profunditatis, qua mergitur; & quoniam pressio in superiorem partem solidi a pressione in inferiorem vix differt (cum modica sit altitudinum fluidi differentia) hinc corpora immersa ab omni parte quasi æqualiter premuntur. Si extremitati tubi vitrei alligatur vesica, aut saccus coriaceus, isque immergatur aquæ, ut altera tubi extremitas supra eam emineat, mercurius ob vesicam a fluido compressam intra tubum ascendit, eoque altius, quo profundius mergitur. Unde perspicitur, corpora solida intra fluidum vi pressionis etiam comprimi, si cedant pressioni, & comprimi possint. Imo secundum comment. Acad. Paris. 1737. cum lagena ad 60 orgyas, quarum quælibet 6 pedes continet, fuisset demissa infra aquam, suber ad fundum lagenæ detrusum fuit, linteum pice obturatum intro pressum, & vas fere totum aqua repletum salsa adhuc. Krafftius P. II. Præl. Acad. §. 138. ait: „ Mihi in mari Baltico naviganti anno 1744. M. „ Augusto, lagena vitrea quadrangula, baseos 4 polli- „ cum quadrat. altitudinis 6 pollic. Londinensium bo- „ lidi nauticæ annexa, & demissa, in aliquot orgya- „ rum profunditate fuit confracta. Alias fortiores & „ rotundas ad 46 org. demissas, ibidemque per aliquot „ horas relictas, intactas semper, & omni aquæ gutta „ vacuas iterum extraxi. „ Nempe vasa superius sphærica, quorum latera quoque rotunda & cylindrica sunt, maiorem vim pressionis sustinent; fornicis enim figuram referunt, cuius crassities ex meris quasi cuneis composita est, qui a pressione introrsum cedere nequeunt. Etsi vero corpora immersa pro ratione altitudinis premantur a fluido ambiente; idem tamen pondus semper amittunt, quamdiu idem volumen retinent, nempe id, quod ponderi voluminis extrusi æquale est. Solida specifice graviora in fluido leviore per gravitatem respecti-

ctivam descendunt; at, si pressio liquidi ei corpori supra incumbentis impeditur, ac tollitur, solidum gravius a liquido inferiore, & laterali sustentabitur, ut decidere haud possit, uti si cylindro ab utraque parte aperto adplicetur ab inferiore parte lamina plumbea, quae exacte cum margine inferiore cylindri congruit, ut aquam excludat, & lamina filo in eius centro affixo sustineatur, donec ad profunditatem aliquot pollicum immersa sit, ea a pressione aquae sustinebitur, uti relicto filo patet; ad maiorem profunditatem magis arcte cylindro adhaerebit; ad exiguam cadet. Si cum lamina aurea experimentum institueretur, profundius esset immergendus tubus, ut pressio aquae gravitatem respectivam auri superet. Uti vero corpus fluido gravius sustineri potest sublata pressione fluidi incumbentis; sic corpus fluido levius, quod per sese sursum pellitur a fluido, in fundo retinebitur, si pressio aquae inferioris tollitur; si enim fundo vasis cylindrici apprimitur discus ligneus paullo minoris diametri, ut aqua dein infusa infra discum subrepere nequeat, ob planitiem disci, & fundi laevigatam, discus fundo manebit affixus etiam cessante pressione externa; cuius rationem esse volunt, quia omnis fluidi pressio hoc casu deorsum dirigitur, nec quidquam aquae adest, quod pressionem sursum exercere possit; sed nisi fallor, columnae laterales, disci latera ambientes eundem etiam sursum urgent, vi quidem exigua, quae est ut differentia altitudinum columnae incumbentis, & columnarum lateralium ultra superiorem disci superficiem pertingentes; haec igitur vis modica ab adhaesione planorum laevigatorum, de qua alio disseremus loco, facile superari potest. Experimentum disci fundo adhaerentis primo protulit HELMONTIUS; unde eiusmodi vas *fitulae, vel hydriae Helmontianae* nomen accepit. Henricus MARUS in eius basi foramen aperuit, & sequentia observavit phaenomena. 1. Si nihil aquae discum subintrat, is disco adhaeret, nihilque e foramine effluit. 2. Si aqua intercedit inter discum, & fundum, ac foramen paullo capacius sit, abripitur discus a fluido, & aliquantum fundo apprimitur, quoniam aqua affluens nequit sursum premere: si autem foramen parvum est, discus modo ascendit, modo foramini adpri-

mitur, quia modo decursus aquæ, modo pressio sursum tendens prævalet. 3. Si parum omnino aquæ discum subit, is semper fundo apprimitur ob pressionem sursum debilitatam; 4. Quamprimum foramen obturatur, sive parvum, sive magnum fuerit, discus ascendit; aqua enim redit ad æquilibrium, ac pressionem sursum more suo exerit.

§. CCXVIII.

Campana urinatoria. Cum observatum esset, aerem pressioni aquæ resistere, campanæ urinatoriæ constructæ sunt, quibus urinatores contecti in mare demittuntur ad colligendas margaritas, aut res naufragio perditas recuperandas: referunt illæ figuram campanæ, & ex quavis materia, quam aer non permeat, ceu metallo, vel ligno pice obducto conficiuntur. Urinator insistit scabello, ad crificium, quod deorsum spectat, affixo. Comparata sic machina dum perpendiculariter mergitur, aer ab aqua in summitatem campanæ cogitur; quo fit, ut hominis insistentis caput semper extra aquam emineat, neque aer ad respirationem unquam desit. Quoniam vero eo magis comprimitur aer, quo profundius campana mergitur; hinc urinator magnis incommodis sæpe afficitur, ut sanguis interdum exprimatur oculis, auribus; imo mors consequi possit in profunditate nimia, ob aerem in corpore contentum non æque compressum. In mediocri profunditate demersus urinator egreditur campana, atque pro libitu se eo iterum recipit, ac per integram etiam horam infra aquas commorari potest, donec dato signo a sociis extrahitur. Plura vid. in STURMII Coll. cur. Tent. I. De dæmunculis Cartesianis, cum passim extent in Museis, dicere nihil attinet; ex compressione enim aeris, & ingressu aquæ per subtile foramen eorum motus, ac situs pendet.

§. CCXIX.

Libellæ Hydrostaticæ situi horizontali determinando serviunt. Est autem eiusmodi libella tubus vitreus utrinque clausus, & aqua, vel potius spiritu vini rectificato ferme repletus, ut modica spatii pars bullæ aereæ

reæ duos, tresve aut plures pollices longæ relinquatur. Quodsi iam eiusmodi tubus horizontaliter collocetur, bulla aeris supernatans quiescit: si vero inclinetur, ita ut alterum extremum depressius, alterum vero altius sit, bulla urgebitur versus partem elatiorem, quia secundum Hydrostatices leges fluida specifice leviora ab alio graviore sursum premuntur. Hinc si loco tubi assumitur sphæra vitrea, bulla non nisi in summitate hæret: si vero latera tubi instar lineæ rectæ, aut instar plani sint, tunc sub horizontali tubi positione bulla ubivis quiescet, nec præcise medium locum occupare cogitur, ut adeo sola quies, non item situs bullæ lineam horizontalem indicet; cum in modica tubi longitudine superficies suprema fluidi pro plana sit habenda. Sed raro contingit, ut tubi vitrei præsertim paullo longiores, prorsus recti sint, ac fere curvaturam quandam internam, & sphæroidis valde oblongæ, & compressæ formam habent. Si iam axis minor sphæroidis sit in medio, & axis maior ponitur situ horizontali, bulla hærebit in summitate axis minoris, nempe loco maxime elevato: inclinato axe maiore bulla progredietur versus partem altiorem. Si vero axis minor non fuerit in medio, uti citra singularem industriam raro contingit, bulla extra medium constituta situm horizontalem indicabit, ac tum circa axem minorem conversa priorem situm tuebitur. Illud præterera observandum, bullam calida tempestate esse breviorem, quia spiritus vini se expandens in arctius spatium eandem cogit: contra frigida tempestate, qua is contrahitur, bulla erit longior.

§. CCXX.

Ascensus & Descensus solidorum in fluidis. Solida corpora specifice graviora in fluidis descendunt per gravitatem respectivam, quam habent: contra leviora per gravitatem fluidi respectivam ascendere coguntur: utrinque motus acceleratur, etsi is crescente paullum celeritate facile transire possit in æquabilem, quando resistentia fluidi effectui gravitatis respectivæ æqualis fit. Si corpora immersa volumen mutent relate ad quantitatem materiæ, quam habent; fieri potest, ut in eodem fluido

do nunc ascendant, nunc descendant. Hinc aiunt, cadavera, quæ primo merguntur in aqua, quodam elapso tempore iterum emergere, ac postea rursus præcipitari; cum enim primo graviora sint æquali aquæ volumine, quod excludunt; subinde laxatis per aquam fibris, atque aere se expandente maius volumen acquirunt massa non aucta: postea vero elapso aere, aliisque partibus levioribus diffugientibus, cum solidæ partes constringuntur, corpus exanime fit compactius, ac subsidit. Diximus supra, pondus ammissum a solido immerso accrescere fluido; gravitas respectiva, siquam solidum habet, ad descensum impenditur, nisi aliunde sustentetur. Si iam una cum vase fluidi pleno e bilance ope fili pendeat corpus specifice gravius fluido immersum, ita ut eius quoque gravitas respectiva ad æquilibrium conferat: tum absciffo vel combusto filo, quo corpus sustinebatur, tolletur æquilibrium, sursum elevato vase; nec restituetur, donec ad fundum vasis pertigerit corpus. Quamdiu enim descendit, gravitas respectiva in descensum impenditur tota, neque in bilancem, ut antea, agit, nisi cum ad fundum pervenerit. Hoc experimento, cuius inventor est Robert. Hocke, Leibnitius usus est ad explicandam rationem, cur decidente pluvia aer aliquando levior fit, quam cum sudum est cælum, vel nebulosum, uti observationes borometricæ ostendunt. Ante imbrem enim totum vaporum pondus admosphæræ addebatur; imbre vero delabente duntaxat pars ponderis eorundem in atmosphæram premit. Sed enim ob alias caussas non est phœnomenon constans, ut barometron tempore sereno altius, pluvio depressius sit.

§. CCXXI.

Gravitas specifica vel densitas fluidorum. Si idem corpus specifice gravius immergitur diversis fluidis, pondera ab hoc amissa, quæ ope bilancis explorari possunt, sunt ut gravitates specificæ fluidorum. Nam pondus amissum semper æquale est ponderi voluminis fluidi exclusi: idem autem corpus gravius immersum semper idem volumen fluidi excludit: consequenter pondera fluidorum sub eodem volumine, id est, gravitates specifi-

cificæ aut densitates eorundem erunt ut pondera amissa a solido. Est hæc methodus omnium optima gravitati specificæ fluidorum determinandæ. Si idem corpus specifice levius diversis fluidis imponitur, ad varias altitudines in iis subsidet, eo maiores, quo fluidum est levius: eo minores, quo fluidum est gravius. Et quoniam hoc casu pondus immersum est constans, eidemque pondus voluminis exclusi semper æquale est; erunt gravitates specificæ fluidorum reciproce ut volumina vel partes immersæ solidi. Huic fundamento innititur *hydrometrum vulgare* (F. XVIII.) id enim impositum e. g. cerevisiæ, mergetur usque ad A; in aqua, quæ levior est, usque ad a; in vino generoso ad b: in spiritu vini ad e. quæ quidem methodus in praxi rudiore sufficit.

§. CCXXII.

Hydrostatica comparatio gravitatis specificæ solidorum. Si in aquam immergantur diversa corpora solida specifice graviora, quæ extrudant volumen aquæ suo volumini æquale, erunt gravitates specificæ eorum corporum solidorum uti pondera absoluta, quæ habent, divisa per pondus in aqua amissum. Sit eiusmodi corpus solidum A; eius pondus absolutum in aere, in quo nihil censetur amittere, quod in praxi communi æstimari queat, sit $= P$; pondus in aqua amissum, sit $=$ Q. Gravitas specifica aquæ, ad quam ceu communem mensuram gravitates solidorum referuntur, sit $= 1$. erit $Q : P = 1 : \frac{P}{Q}$. Nam pondus amissum Q est æquale ponderi aquæ sub volumine eodem, quod habet solidum; si autem volumina sunt æqualia, pondera sunt ut gravitates specificæ secundum formulam §. XX. $P = GV$; & si $V = 1$; $P = G$. Igitur quartus terminus $\frac{P}{Q}$ exprimit gravitatem specificam solidi A relate ad aquam. Hæc gravitas specifica sit $G = \frac{P}{Q}$. Sit aliud

soli-

ſolidum B ; eius pondus abſolutum $= p$; pondus in aqua amiſſum $= q$; erit ex eadem ratione, $q : p = 1 : \frac{p}{q}$; dicatur quartus terminus, qui gravitatem ſpecificam ſolidi B relate ad aquam exprimit, g. erit igitur $G = \frac{P}{Q}$, & $g = \frac{p}{q}$; ac proin $G : g = \frac{P}{Q} : \frac{p}{q}$. Si volumina corporum immerſorum, quæ aqua graviora poſui, ſint æqualia, gravitates eorum ſpecificæ erunt, uti ipſa pondera abſoluta, quæ habent. Sit autem moles ſtanni, ponderis 300 gran. in aqua amittat pondus 40, 5. divide proinde pondus 300 per 40, 5. quotus erit proxime 7, 4; quæ eſt gravitas ſpecifica ſtanni. Si vero corpora ſpecifice leviora merguntur in aquam, eorum gravitates ſpecificæ ſunt ut partes immerſæ diviſæ per totum volumen, quod habent; ac ſi volumina æqualia ſint, directe ut partes immerſæ. Sint eiusmodi corpora A & B, volumina a & b; gravitates ſpecificæ G, & g; partes immerſæ M, & m; gravitas ſpecifica aquæ $= 1$. Quia hoc caſu pondus corporis immerſi & voluminis excluſi æquale eſt, erit gravitas ſpecifica ſolidi ad gravitatem ſpecificam ut volumen fluidi æquiponderans, ſive ut pars immerſa ad volumen totius ſolidi; igitur erit

$$1.\ G : 1 = M : a;$$

$$2.\ g : 1 = m : b$$

adeoque $G : g = \frac{M}{a} : \frac{m}{b}$; & ſi $a = b$; erit $G : g = M : m$.

Ex his deducta eſt ſequens tabula gravitatum ſpecificarum, quam ex MUSCHENBROECKIO deſumptam propriis experimentis non nihil auxit KRAFFTIUS.

TA-

TABULA

CONTINENS NON NULLORUM CORPORUM

GRAVITATES SPECIFICAS.

Æs Iaponicum.	9,000.
Suecicum.	8,784.
Calcinatum.	5.453.
Aurichalcum fusum.	8,000.
Tusum.	8,349.
Argentum purum.	11,091.
Aurum purissimum.	19,640.
Aurea Guinea.	18,888.
Aureus Ludovicus	18,166.
Ducatus	18,261.
Chalybs mollis.	7,738.
Durissimus.	7,704.
Elasticissimus.	7,809.
Ferrum.	7,645.
Mercurius Germanicus.	14,000.
Brittanicus.	13,593.
511 Vicibus destillatus.	14,110.
Mercurius sublimatus corrosivus.	8,000.
Plumbum Brittanicum.	11,325.
Germanicum.	11,310.
Stannum purum.	7,320.
Brittanicum.	7,471.
Zincum.	7,350.
Achates.	2,631.
Agathus.	2,512.
Adamas.	3,517.
Carneolus.	3,290.
Calcedonius.	2,559.
Creta alba.	2,252.
Chrystallus Islandica.	2,720.
Vulgaris.	2,650.
Granatus Bohemicus.	4,360.
Suecicus.	3,978.
Hyacinthus.	2,361.
Iaspis.	2,666.

La-

Lazuli.	3,054.
Lithantrax.	1,240.
Magnes Pensylvaniæ.	4.585.
Marmor.	2,707.
Onyx.	2,510.
Opalus.	2,016.
Silex vulgaris.	2,542.
Terra hortorum.	1,630.
Terra Lemnia.	2,000.
Vitrum purissimum album.	3,150.
Viride.	2,620.
Succinum.	1,065.
Lateres durissimi.	2,006.
Sulphur vulgare.	1,800.
Alumen.	1,714.
Nitrum.	1,900.
Sal Ammoniacum.	1,453.
Calculus vesicæ humanæ.	1,700.
Corallia rubra.	2,689.
Alba.	2,500.
Cornu bovicum.	1,689.
Cervi.	1,875.
Ebur.	1,325.
Oculi cancri veri.	1,890.
Spurii.	2,480.
Ossa bovis recentia.	2,222.
Abies.	0,550.
Acer.	0,755.
Buxus.	1,031.
Cedrus.	0,613.
Ebenum.	1,177.
Fagus.	0,854.
Iuniperus.	0,556.
Quercus.	0,929.
Suber.	0,240.
Cera flava.	0,955.
Pix.	1,150.
Aqua pluvia.	1,000.
Destillata.	0,993.
Marina.	1,030.
Putealis.	0,999.

For-

Fortis.	1,300.
Regia.	1,234.
Aer.	0,001¼.
Acetum vini.	1,011.
Lac bubulum.	1,030.
Caprinum.	1,009.
Asininum.	1,021.
Urina humana.	1,016.
Oleum amygdalarum dulce.	0,928.
Lini.	0,932.
Olivarum.	0,913.
Terebinthinæ.	0,792.
Oleum tartari per deliquium.	1,550.
Vitrioli.	1,700.
Sanguis humanus.	1,040.
Spiritus nitri.	1,315.
Vini rectificatus.	0,866.
Vitrioli.	1,203.
Vinum Burgundicum.	0,953.
Campanense.	0,962.
Rubrum ex capite bonæ spei.	1,018.
Mosellanum.	0,916.
Canariense.	1,033.
Cuprum Japoniæ.	8,830.
Aurichalcum Sinense	8,431.
Magnes.	4,655.
Alius.	4,806.
Alius.	4,778.
Iaspis Russiæ.	2,623.
Porcellana purior.	2,363.
Impurior.	2,346.
glacies aquæ purissima.	0,916.
Spiritus vini gallicus.	0,933.
Moneta ænea Cæsaris Claudii.	8,313.

§. CCXXIII.

Usus Tabulæ. Hæc tabula ita constructa est, ut numeri singulis speciebus adscripti, ceu integri, non ut decimales capi queant; ac tum *pes cubicus* aquæ plu-

viæ tenebit 1000 uncias, qui numerus ipsi adscriptus est, quam proxime, computando 16 uncias pro libra Amstelodamensi; ubi porro uncia tenet 8 drachmas, drachma 60 grana; unde pondus pedis cubici aquei ita prodit $62\frac{1}{2}$ tt. Genus huius ponderis vocari solet *averdupois*. Hoc igitur posito reliqui numeri omnes exhibent pondus pedis cubici ex sua materia; sic pondus pedis cubici ex auro purissimo erit 19640 unc. vel $1227\frac{1}{2}$ libr. ex marmore 2707 unc. vel $169\frac{3}{16}$. lib. Intelligendus autem est pes Rhenanus duodecim pollicum, unde istiusmodi pes cubicus tenet 1728 pollices cubicos. Hinc in tabula exhibetur, vel eius ope inveniri potest

I. *Ratio gravitatum specificarum*, sive ponderum sub eodem volumine unius pedis cubici.

II. *Volumen corporis dato eius pondere.* Detur enim terræ hortorum cumulus, qui ponderet 10 libras. Quæritur, quodnam huius sit volumen. Invenio huic terræ adscriptum numerum 1630. Hinc fiat analogia: terræ huius unciæ 1630 efficiunt 1 pedem cubicum sive 1728 pollices cubicos, quidnam igitur horum efficient 10 libræ, sive unciæ 160? ac invenitur, hunc terræ cumulum efficere pollices cubicos $169\frac{101}{163}$ in volumine. Eodem modo si habeantur fragmenta coralliorum rubrorum, ponderis 7 unc. Quoniam gravitas specifica coralliorum reperitur $= 2689$; fiat: unciæ 2689 efficiunt unum pedem cubicum, sive 1728 pollices cubicos; 7 unciæ quid efficiunt? ac reperitur $4\frac{1340}{2689}$ numerus pollicum cubicorum pro volumine.

III. *Dato volumine corporis in pedibus cubicis invenitur eius pondus absolutum*; eoquod (ex §. XX.) $P = G V$. Sit quædam superficies 30000 pedum obtegenda plumbo, ut laminæ plumbeæ crassities sit $= \frac{1}{100}$ ped. Erit volumen plumbi $= 30000 \times \frac{1}{100} = 300$. Porro gravitas specifica plumbi Brittanici $= 11325$. Hinc pondus absolutum erit 3397500 unciarum; quod ad libras facile reducitur.

IV. *Dato pondere absoluto corporis, & pondere in aqua amisso, reperitur genuina gravitas respectiva, &* pu-

puritas dati corporis. Sit examinanda moneta argentea, quæ ponderet in aere $72\frac{1}{4}$ gr. in aqua $65\frac{1}{2}$ gr. Unde pondus amissum æquatur $6\frac{3}{4}$ gr. Dividatur igitur (§. CCXXII.) pondus in aere, quod pro absoluto assumitur, per pondus amissum, ut obtineatur dati corporis gravitas specifica relate ad aquam positam $=1,000$. & obtinebitur proxime in hoc casu numerus decimalis 10,704. Sed argenti puri gravitas ex tabula est $=11,091$. Ergo oblata moneta non est ex argento puro confecta. Sit dein ducatus aureus ponderis 60 gr. in aere: pondus amissum in aqua sit 3,285 gr. Erit igitur (CCXXII.)

$$Q : P = 1 : \frac{P}{Q} = \frac{60000}{3285} = 18,261$$ quæ est gravitas specifica ducati in tabula expressa; quare concludi potest, nummum esse genuinum aurum. Ad hunc igitur locum pertinet celebre inventum ARCHIMEDIS, quo regi HIERONI detexit, coronam auream votivam ab aurifabro elaboratam non constare auro puro, uti rex voluerat, sed argento esse mixtam, uti VITRUVIUS narrat de Arch. L. IX. C. 3. Cum igitur HIERO, indicio facto, hoc est, uti non nulli interpretantur, super lapide lydio fraudem subodoratus esset, paravit sibi ARCHIMEDES massam unam ex auro puro, alteram ex puro argento, utramque eiusdem ponderis cum corona. Hæc tria pondera singillatim vasi aquis perfecte repleto imposuit, ut videret, quantum aquæ volumen quodvis excluderet; observavitque coronam auream eiicere plus aquæ, quam aurum purum, minus autem, quam argentum; hinc legitime conclusit, coronam ex utroque metallo esse mixtam. Si enim corona aurea plus aquæ eiicit, quam massa auri eiusdem ponderis, illa pura & homogenea non est; cum enim ex hyp. pondera utrinque sint æqualia; si gravitas specifica utrinque pariter eadem esset, volumina quoque & coronæ & massæ fuissent æqualia: volumina autem fuisse inæqualia, ex inæquali volumine aquæ eiectæ manifesto colligebatur. Unde ex voluminibus aquæ eiectis quantitas mixtionis determinari potuit. Sit pondus auri puri, argenti, & coronæ $=$ p. Ex hyp. enim pon-

dera erant æqualia. Pondus ſeu volumen ab auro puro eiectum $= a$; ab argento $= b$; a corona $= c$. Pondus verum auri in corona $= x$; erit pondus argenti in eadem $= p - x$. Si in eodem fluido res peragatur, erunt pondera corporum homogeneorum, uti volumina, quæ habent: volumina autem horum corporum, uti volumina aquæ eiectæ; hinc erit 1. Pondus p auri puri ad pondus auri x in corona; uti volumen aquæ ab auro puro eiectum ad volumen aquæ a pondere auri x in corona eiectum ſeu $p : x = a : \frac{ax}{p}$. 2. Similiter de argento erit $p : p - x = b : \frac{bp - bx}{p}$; quartus terminus indicat volumen ſeu partem aquæ a pondere argenti in corona eiectam; nam pars aquæ eiectæ a corona debetur auro, pars argento inter ſe mixtis; utraque pars efficit totum volumen aquæ eiectæ a corona; hinc erit $\frac{ax}{p} + \frac{bp - bx}{p} = c$; & $ax - bx + bp = cp$; ſeu $bp - cp = bx - ax$; denique $x = \frac{b - c \times p}{b - a}$.

Ponatur $p = 18$. $a = 1$. $b = 1\frac{1}{2}$. $c = 1\frac{1}{3}$; erit $x = 6$; ac proin $p - x = 12$. Unde in hac hypotheſi auro admixtæ fuiſſent 12 argenti libræ. Sed fuere, qui hanc methodum Archimedis in dubium vocarunt; certe minus eadem exacta eſt ob inſuperabilem difficultatem colligendi aquæ eiectæ copiam, eiusque verum pondus cognoſcendi.

C A-

CAPUT IV.

De Fluidis Prosilientibus e Lumine Vasorum.

Vix quidquam in hac re certi habetur, quod ultra hypothesin pertingat. Quapropter quæ ad fluidorum motum e lumine vasorum prosilientium pertinet, potius attingenda a nobis, ac delibanda sunt pro instituto operis nostri, quam multis verbis explicanda.

§. CCXXIV.

Definitio. *Lumen* vocatur apertura canalis, ex qua fluidum prosilit. Ipsa vero fluidi columna e lumine prosiliens *iactus* dicitur. Cum vero lumina ponantur finitæ magnitudinis, altitudo fluidi erumpentis æstimatur ex distantia centri gravitatis luminis a libella, sive suprema superficie fluidi.

§. CCXXV.

Propositio. *Fluida ex luminibus vasorum prosilientia ad eandem vasis libellam, sive altitudinem ferri debent; celeritas vero particularum effluentium est in ratione subduplicata altitudinis.* Hæc sunt bina præcipua theoremata ad Hydraulicam, seu motum fluidorum pertinentia, & a Torricellio proposita ad calcem libri secundi de motu gravium, atque a pluribus Auctoribus primo comprobata, ac experimentis stabilita ratione quadam propinqua. Eadem ut demonstraret Newtonus, lamellas aquæ prosilientis, quæ ab incumbente fluido pro ratione altitudinis premuntur, ita consideravit, ac si vi gravitatis descendissent ab ea altitudine, quam supra lumen, vel orificium habent; quantam enim celeritatem vi gravitatis acquisiisset eo descensu; tantam ab incumbente fluido, ac pro ratione altitudinis premente videntur acquirere; quemadmodum igitur celeritas eo descensu acquisita, foret talis, ut ad eandem altitudinem ascendendo pertingerent (§. XC. n. 5.) eaque esset in ratione subduplicata altitudinis, seu spatii percursi (§. LXXXVII.) sic idem in lamellis fluidi e lumine vasis prosilientis debet contingere.

 Quo-

Quoniam in fontibus salientibus altitudo iactus aliquantum deficit ab altitudine supremæ superficiei, seu libella aquæ; is defectus adscribi solet primo *impedimento aeris, quo etiam in plures guttulas iactus dividitur;* secundo *particulis e supremo fastigio relabentibus, ac guttulas subsequentes retardantibus; certe aperto orificio guttulæ primo erumpentes altius videntur ferri, & ope Antliæ pneumaticæ subducto aere guttularum dispersio desinit, & maior altitudo iactus obtinetur: si denique columna fluidi prosilientis est inclinata, ut alia via redeant guttulæ, quam ascenderunt, pariter iactus altior observatur:* tertio *frictioni, quam lamellæ aquæ ex luminis asperitate patiuntur, & per quam altitudo in maioribus iactibus magis minuitur, minus in minoribus; ut, cum altitudo aquæ supra orificium est* 5 *pedum, iactus non nisi* $\frac{1}{80}$ *ab illa altitudine deficiat; cum vero est* 33 *vel* 44 *ped. defectus ad* $\frac{1}{11}$ *pertingat. Altera propositionis pars cum priore connexa ob leges gravium, ob quas celeritas initialis in ratione subduplicata altitudinis, vel subduplicatæ quam proxima statuitur, multis experimentis sat confirmata est; sed enim cum pressio fluidorum per quamvis sectionem horizontalem æqualiter propagetur, idcirco particulæ ex lumine prosilientes non eæ duntaxat sunt, quæ lumini directe respondent, eive perpendiculariter incumbunt, sed obliquis motibus undique e lateribus confluunt, & in alias incurrunt, ac convergunt ita, ut vena aquæ exilientis paulo infra foramen contracta adpareat, ac Newtonus quidem diametrum venæ contractæ dimidio fere ultra foramen digito ad foraminis diametrum se habere deprehendit ut* 21: 35. *Unde perspicuum est, ob plurimorum motuum compositionem nec celeritatem, nec altitudinem fluidi prosilientis satis revocari ad calculum posse.* (*§. CCVI. n. VIII.*

§. CCXXVI.

Corollarium I. Spectatis generalibus principiis fluida eadem celeritate, qua ex luminibus determinatæ magnitudinis prosiliunt, per canales æquales derivari deberent. Verum cum fluidum in longo canali fertur (inquit Musschenbroeckius in Elem. Phys. C. XXII.) a pa-

a parietibus patitur perpetuo attritum, quo retardatur, & quidem plus minusve pro varia canalis politura, vel asperitate. Cum multis quoque anfractibus inflectuntur canales, resistentiam experiuntur fluidi particulae, lateribus impactae resiliunt, ac fluidum a tergo adfluens retardant. Quibus caussis multo minor fluidi quantitas per canales fertur, quam computationes praeciperent; imo teste experientia (Hist. Acad. Regiae An. 1732) si in curvaturis tuborum haeret aer, aqua tantopere retardatur, ut undevigesies minor quantitas, quam par est, transfluat. Idcirco experti artifices super omnes fistularum curvaturas ponunt cucurbitas, recipiendo aeri destinatas. Ideo, inquit laud. Auctor, mirandum non est, aerem venis animalis infusum, instar praesentis veneni occidere, cum sanguini circulum obeunti, veluti firmissimus obex resistat.

§. CCXXVII.

Corollarium II. Si quod vas depletur, columna fluidi foramini incumbens identidem fit brevior, ac minus premitur, proindeque minore celeritate prosilit; & si celeritates, queis lamellae egrediuntur, sint in ratione subduplicata altitudinum, eaedem similem habebunt motum, ac gravia sursum proiecta; quemadmodum igitur in motu gravium spatia paribus temporibus percursa, sunt uti numeri impares, seu incipiendo ab ultimo tempore ut 1. 3. 5. 7. &c. (§. XC.) ita eodem modo se habebit quantitas fluidi e vase descendentis incipiendo ab ultimo tempore. Hinc derivatur methodus construendi clepsydras ope fluidi, quibus olim veteres utebantur; quae quidem methodus hoc problemate continetur: *Vas quodcunque cylindricum dividere in partes, quarum singulae datis temporibus depleantur, dato tempore, quo depletur totum.* Effluat e. g. omnis in cylindro contenta aqua per datum in eius fundo foramen spatio 12 horarum; sitque idcirco in 12 partes dividendus cylindrus, ut earum singulae singulis horis depleantur. Fiat quadratum numeri 12, nempe 144. Tum vasis altitudo, qua fluidum pertingit, dividatur in hunc aequalium partium numerum 144. Dico: harum ultima, quae est

prope vasis fundum, ultima, seu duodecima hora depletur; tres proxime superiores hora penultima, seu undecima, quinque ulteriores decima hora, & ita porro sumendo semper superiorum reliquarum partium numeros impares 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ac demum 23 ad vasis extimam superficiem terminatas, quæ hora prima exhaurientur. Ratio intelligitur ex dictis.

Cæterum de motu fluidorum e vasorum lumine prosilientium quasdam observationes, ac regulas collegit Mariottus; ut 1. *Quo canalis fluidum vehens est amplior respectu luminis, eo fit iactus altior. Sunt tamen limites quidam, ultra quos experientia teste amplitudo canalis nil confert ad augendum iactum.* 2. *Quo lumina sunt ampliora, eo iactus fit altior; quia tenuis iactus ab aere citius in guttas dispergitur; verum & luminum amplitudo videtur habere limites.* 3. *Lumina in plana lamella metallica valde tenui, tubo directe imposita, iactum maxime regularem, minimoque cum attritu transmittunt; si vero canalibus imponuntur tubi, conici, vel cylindrici altitudo iactus minuitur ob attritum maiorem parietum. De cursu fluminum alio loco disseremus.*

CAPUT V.

De Resistentia Fluidorum, per quæ alia Corpora moventur.

Qui Newtoni, Euleri, Bernoullii de resistentia medii commentationes spectat, facile intelligit, hanc tractationem æque, ac prior erat, incertam esse, & complicatam, atque in Mechanica omnium fortassis longe difficillimam. Ac resistentiam quidem absolutam a priori determinari haud posse, abunde ostendit Lecchius in Hydrostatica, nec vero experientiæ adhuc collectæ rem decidunt. Quapropter de ratione & proportione resistentiæ maxime disserendum est.

§. CCXXVIII.

Hypothesis. *Moveatur sphæra per fluidum continuum, ac homogeneum seu eiusdem ubique densitatis, quodque com-*

comprimi, ac condensari nequit. Quoniam motus sphæræ intra eiusmodi fluidum fieri nequit, nisi partes fluidi eodem tempore dimoveantur loco suo, atque ad motum concitentur; hinc sphæra patitur resistentiam, quæ est instar vis motum *continuo* retardantis; cuius effectus (uti in omni vi acceleratrice, vel retardatrice) tempore infinite parvo pariter infinite parvus est; si enim eiusmodi tempore ea motum finitum sphæræ extingueret, tempore finito utcunque parvo omnis extingueretur motus. Porro effectus huius resistentiæ est diminutio quantitatis motus, quam sphæra habet; & si massa ponitur eadem, effectus erit diminutio celeritatis, sive retardatio motus. Ut igitur intelligatur, qua ratione motus quantitas, sive etiam celeritas diminuatur, sequentia sunt spectanda.

I. *Resistentia medii seu fluidi, per quod sphæra transit, est directe ut diminutio quantitatis motus, ac reciproce ut tempus, quo ea durat.* Dicatur resistentia, ceu vis contraria R; tempusculum, quo agit, t; diminutio quantitatis motus in sphæra sit $-q$, posito eius motu positivo seu $Q = MC$, (§. XXVIII.) erit $Rt = -q$; quivis enim effectus eo maior est, quo maior est caussa, & quo longiore tempore agit. Consequenter erit $R = \frac{-q}{t}$.

II. *Resistentia crescit directe, ut densitas fluidi;* nam quo densius est fluidum, eo maior massa eodem tempore impellenda, atque e loco suo dimovenda est.

III. *Resistentia crescit ut quadratum diametri sphæræ;* concipiantur enim binæ sphæræ inæquales, sed eiusdem massæ per idem fluidum, eademque celeritate motæ. Erit numerus partium fluidi ab utraque sphæra dimovendarum, uti est superficies, vel potius dimidia superficies utriusque sphæræ, dum enim hæc per liquidum incedit, ad partes anticas superficiei eiusdem liquidum attollitur, ad posticas deprimitur. Cum igitur superficies sint ut quadrata diametrorum; in eadem ratione erunt resistentiæ.

IV. *Resistentia crescit ut quadratum celeritatis, qua*

sphæra in fluido progreditur. Moveantur binæ sphæræ magnitudine, superficie, densitate æquales, sed inæquali celeritate in eodem fluido, sphæra A celeritate $= 1$; B celeritate $= 2$; igitur hæc eodem tempore duplam massam fluidi, eandemque dupla celeritate impellere, ac dimovere debet; igitur resistentiam sentiet quadruplam, altera sphæra A simplam. Nam positis reliquis paribus, resistentia, quæ ex sola reactione medii secundum leges vis inertiæ oritur, est ut quantitas motus communicati. (§. XXX.) Hæc autem quantitas motus est ut massa, seu quantitas fluidi dato tempore dimovenda (quæ quidem massa cæteris paribus est velocitati proportionalis) & ut velocitas, qua eadem dimovetur, coniunctim.

V. *Si in eodem fluido pari celeritate moventur sphæræ æquales, sed inæqualis densitatis, vel massæ, effectus resistentiæ in massa maiore seu sphæra densiore est minor.* Quia densitas fluidi, celeritas, ac magnitudo utriusque sphæræ eadem est, fluidum eodem modo agit in utramque; effectus tamen, seu retardatio motus in massa maiore est minor; cum ea ob maiorem quantitatem motus ac vim, quam habet, facilius resistentiam vincat.

VI. *Ad resistentiam medii etiam affrictus partium mobilis ad partes fluidi, & tenacitas seu viscositas fluidi pertinet.* Motus enim in fluido sine omni frictione concipi nequit: quævis autem frictio, cum sit instar vis contrariæ, motum minuit. Tenacitas autem, seu viscositas partium fluidi quæ ex mutua partium earundem attractione oritur, vim quandam a mobili adhibendam requirit, qua ea particularum cohæsio superetur. Hæc resistentia, quæ ex partium tenacitate oritur, si ea tenacitas est uniformis, rationem velocitatis sequitur; quia eo sæpius eadem a mobili adhibenda vis est, quo maiore velocitate incedit. Atque idcirco resistentia fluidi spectata inertia proportionalis est quadrato celeritatis (n. IV.) spectata tenacitate celeritati simplici. Hanc autem tenacitatis resistentiam experimenta non nisi in fluidis glutinosis, & in motibus tardissimis faciunt sensibilem.

SCHO-

SCHOLION GENERALE.

Ex his colligi quadam ratione potest, quomodo resistentia ex omnibus caussis coniunctis crescat. Quae de sphaeris diximus, ad alia corpora similia, ac similiter mota adplicari possunt; patet vero eo maiorem esse resistentiam, quo magis obtusa seu compressa sunt corpora. Hinc nautae, ut aquae resistentia instar hypomochlii uti possint, non acie remi eandem findunt, sed latiorem palmulam obvertunt. Si glans plumbea in plures globulos minores dividitur, crescit resistentia, quia superficies augentur medio expositae. Etsi vi gravitatis plumula & plumbum ex eadem altitudine eodem tempore deciderent (§. XCI. n. III.) Tamen magis retardatur plumulae levioris motus ex n. V. huius §. Quae praeterea theoremata demonstrari solent hoc loco, aut incerta sunt, aut difficilem adplicationem habent. Quapropter iisdem supersedere me posse censui. Universae autem Hydrostatices praeclara commoda atque usus varii in omni prope scientiarum naturalium genere, atque adeo in communi vita ex Boylii de medicina hydrostatica praestante opere possunt colligi. Certe de nativa indole plurimorum corporum ex specifica eorundem gravitate maxime iudicium ferri potest, uti cum lapides vulgares ad aquam spectata gravitate specifica sint, ut $2\frac{1}{2}$, ad 1 & stannum ad eandem ut 7 ad 1 proxime; hinc si lapides effossi maiorem gravitatis rationem habent, coniectura fit primo, eas minerales esse, uti magnes habetur passim. De corolliis dubitarunt non nulli, ad plantarum, an lapidum genus sint referenda; at cum eorum gravitas ad aquam sit ut 2, 68 ad 1, lapidibus iisque haud vulgaribus ea adnumeranda videntur. Cum vesicae humanae calculus ad aquam sit ut 1,7 ad 1, nequit is vulgari generi lapidum proprie accenseri. Mercurii gravitas ad aquam diversa deprehenditur, aliquando ut $13\frac{1}{2}$ ad 1, aliquando ut 14 ad 1; hinc ex solo diverso pondere mercurii barometra dissentire possunt. Ex Hydrostaticis legibus plurimae hypotheses, quas ad explicandum lapsum gravium confinxere Veteres, ceu falsae, & naturae repugnantes abiiciendae sunt. De viribus particularibus fluidorum,

ob

ob quas ea sese mutuo attrahunt, vel ad latera vasorum elevantur, aut deprimuntur, alio loco differendum est. non possunt enim particulares leges virium recte exponi, confirmarique, nisi generales Mechanices leges antea recte explicatæ, ac stabilitæ sint, ut ego quidem opinor.

SECTIO V.

De Motu Corporum Curvilineo.

CAPUT I.

De Quantitatibus infinite parvis, vel magnis, earumque Usu.

Quoniam naturæ operationes motu peraguntur, eiusque ope ad Geometriam revocari possunt; præmittendas censui hoc loco quasdam notiones, ac lemmata geometrica de quantitatibus infinite parvis, & infinite magnis, cum earum amplissimus usus sit in genuina Physica, neque expositio plus difficultatis habeat, quam Veterum de continuo, & infinito disceptationes, queis adeo teneræ iuventutis ingenia imbuebantur.

§. CCXXIX.

Definitio I. Quando actio virium adpellatur *continua*, stricta continuitas temporis intelligenda est, vi cuius, ut fluxus temporis nunquam sistitur, cessat, vel interrumpitur, ita actio virium toto, quo durat, tempore nullis abrupta morulis, nusquam hiulca, sed vere continua, ac sine ulla intermissione continuata debet concipi. Hinc posita vi continuo agente intra datum tempus nullum tempusculum poni vel concipi potest, intra quod ea vis non agat.

Non est hic de vi inertiæ nobis sermo, ob quam siquod corpus ad motum est determinatum, is motus, quamdiu

diu vi contraria non extinguitur, vere continuatur, sive continuus est. Exolevit enim fere opinatio quorundam Philosophorum celeritatem, ac tarditatem motus per interpositas morulas explicantium. Sed cum de viribus continuo agentibus loquimur, eas intelligimus vires, per quas corpus vi inertiæ præditum continuo sollicitatur ad motum, ut, cum corpus sollicitatione quadam impulsum vel quodam modo animatum vi inertiæ motum conservet, is ob novas sollicitationes continuo crescere, vel si alteri impressæ vi oppositus sit, continuo decrescere debeat. Hinc vires continuo agentes acceleratrices, vel retardatrices sunt (§. LXXXII.) *ceu gravitas, elasticitas, quamdiu corpus elasticum tensum vel compressum est.*

§. CCXXX.

Definitio II. Idea virium (uti ea in mente nostra est in hoc mortali statu) ideam celeritatis continet; idea celeritatis autem spatii ac temporis ideas complectitur. Celeritatem, spatium ac tempus ultra omnes limites determinate adsignabiles crescere, seu augeri posse, in Philosophia Prima §. XVIII. demonstravimus ex ipsa earum rerum, & cuiusvis quantitatis abstracta idea, mentisque nostræ facultate, ideam datæ quantitatis ultra omnes limites iterandi, atque ampliandi. Nunc cum maturior ista res videtur, præterea demonstrandum est, eas quantitates, nempe celeritatem, spatium ac tempus ultra omnes limites determinate adsignabiles imminui posse, atque infinite parvas poni.

§. CCXXXI.

Propositio I. *Spatium ac tempus abstracte spectatum indefinite, id est, ultra omnes limites determinate adsignabiles imminui potest.* Dem. F. XIX. T. IV. Recta A C fixa in C, convertatur circa hoc punctum C motu æquabili, ut acquirat situm a C; utque bini radii A C, a C instar binarum regularum spectari queant. Perspicuum est, quod, si eæ rectæ distent in punctis extremis A, & a, semper ac necessario etiam distent circa puncta intermedia M, & m; minus tamen, quam in A & a.

Hinc

Hinc si minor intermediorum punctorum distantia transferri concipiatur in puncta A, & a, semper habebitur quædam punctorum istorum distantia, eaque indefinite imminui debebit, ut nullus huius imminutionis limes adsignari, vel intelligi queat, ut in Phil. Prim. §. LIX. n. III. ostendi de binis regulis. 2. Dum recta C A convertitur circa C, progrediente puncto A, quodvis intermedium punctum M eodem tempore progreditur, ut arcus maior A a, & arcus minor M m eodem tempore describatur; neque concipi potest tempusculum, quo punctum A movetur, punctum M non movetur; secus recta C A non maneret recta, sed inflecteretur contra hyp. Hinc *numerus progressuum* utrinque æqualis est, ipsa autem *magnitudo progressuum* sive arcus utrinque descriptus est inæqualis, nempe in ratione radiorum C A, & C M; quoniam motus æquabilis est ex hyp. & tempora motus in punctis A & M constantia, erit celeritas inæqualis nempe in ratione spatii, seu arcus descripti; neque ista celeritatum inæqualitas per interiectas morulas intelligi potest; quia puncto A progrediente nequit ullum intermedium punctum M quiescere salva rectitudine rectæ C A; deberet autem punctum M tardius incedens aliquando quiescere, & plures habere morulas, vel longiores, si celeritatum inæqualitas ex interiectis morulis oriretur. His positis, quæ omni carent obscuritate, si minor celeritas puncti M transferri concipiatur in punctum A; erit dein istius velocitas minor, quam antea, & minor etiam quam antea erit velocitas intermedii puncti M; erit tamen istius aliqua semper velocitas, quamdiu movetur punctum A. Quodsi hæc minoris velocitatis puncti M in punctum A translatio iterum iterumque, ac sine fine concipiatur repeti, semper erit aliqua puncti utriusque velocitas, sed ea sine ullo limite imminui intelligetur.

Celeritatem motus indefinite imminui posse ex ipsa spatii divisibilitate in infinitum consequitur. Nam linea fluxu puncti gignitur; si ergo indefinite linea minuitur, is fluxus, seu motus ac tempus necessario in plures, ac plures partes, sed easdem minores dividi intelligitur. Abundat tota Geometria, omnesque RR. Geometrarum, atque etiam Physicorum libri istiusmodi exemplis, ac demonstra-

ſtrationibus. Unicam præterea adnectam ſane perfacilem. Sint F. XX. parallelæ A B , C D , quas in infinitum poſſe produci , in Phil. Prim. §. XVIII. poſitive demonſtravi. Earum diſtantia ſit quævis perpendicularis F G ; aſſumto pro arbitrio puncto E ducatur quæcunque recta obliqua E H ſecans rectam F G in K , & agatur I H parallela ad F G. Dico rectam F G indefinite dividi poſſe. Sit enim conſtans $FG = a$, & $EF = b$; *variabilis autem , & utcunque creſcens* $EI = x$; *erit ex Elem.* $EI : IH (FG (= EF : FK$ *ſeu* $x : a = b : FK = \frac{ab}{x}$. *Fieri igitur non poteſt , ut* FK *fiat* $= 0$; *deberet enim aut a , aut b eſſe nullum , ac evaneſcere. Eo minor autem fiet F K , quo maior eſt diviſor , ſeu quantitas variabilis x ; quæ cum in infinitum augeri poſſit , neceſſario recta F K in infinitum minuetur. Si motus , qui in natura fiunt , expendimus , cito deprehendimus , numerum partium , in quas quodvis ſpatium , ac tempus dividi debet , omnem noſtram imaginandi vim excedere. Certe ſpectata diviſibilitate materiæ , de qua §. XXII , & in Schol. gen. §. XXXII. n. III. nonnulla adnotavimus , parum dicitur , ſi in longitudine unius lineæ ſtatuuntur particulæ* 1000000 , *quas ſucceſſive percurrere debet corpus , quod movetur ; hinc cum pes contineat* 144 *lineas , in longitudine unius pedis ponendæ ſunt particulæ* 144000000; *& quoniam globus tormentarius iuſta pulveris quantitate excuſſus ſecundum Merſenni calculum intra* 1'' *conficit* 600 *pedes , idem ſucceſſive percurret particulas* 86400000000 ; *totidem ergo minora tempuſcula concipienda ſunt intra unum minutum ſecundum , ſive intra tempus illud , quo homini ſano , ac mediæ ætatis arteria ſemel pulſat ; motus enim fit ſucceſſive , ut ſingulæ particulæ ſpatii intra totidem particulas temporis percurrantur. Sed maior adhuc numerus invenitur ex velociſſimo aſtrorum motu. Mercurius , qui ex planetis ſoli proximus eſt , intra* 1'' *circiter* 24000 *pedes emetitur , proinde particulas ſpatii* 3456000000000 ; *& quoniam cometa An.* 1680, *dum valde propinquus ſoli erat , celeritate ſua ipſam Mercurii velocitatem octies ſuperavit , intra* 1'' *univerſe percurrit particulas ſpatii* 27648 000 000 000. *In tot igitur* mi-

minora tempuscula unicum minutum secundum reipsa divisum fuisse intelligitur; & quoniam celeritas motus ultra omnes limites determinate adsignabiles augeri potest; eo ipso tempus indefinite posse dividi perspicuum est.

§. CCXXXII.

Definitio III. Infinite magnum, & infinite parvum in Geometria adpellamus, quod augeri, & minui posse ita concipimus, ut simul intelligamus, nullum incrementi, vel decrementi necessarium limitem posse adsignari, donec quantitas aucta, vel imminuta datam quandam rationem obtineat.

Hæc notio exemplis illustranda est. 1. *Quando latera polygoni circulo inscripti, vel circumscripti dicimus infinite parva, denotamus, eorum numerum ita aug... & magnitudinem ita imminui posse, ut nullus augmenti, & decrementi limes queat adsignari, donec id polygonum rationem æqualitatis cum circulo habeat; cumque quodvis latus polygoni circulo circumscripti sit tangens circuli, latus vero polygoni inscripti chorda; idcirco pro arcu minimo sumimus tangentem, chordam, vel etiam sinum rectum infinite parvum; quia hæc ita imminui posse intelligimus, ut ad æqualitatem cum arcu minimo accedant.*

2. *Summam progressionis arithmeticæ e. g.* c, $2c$, $3c$, $4c$ - - C; *cuius numerus terminorum ponitur* T, *dicimus æquari facto ex termino ultimo* C *in dimidium terminorum numerum, si primus terminus* c *est infinite parvus, hoc est, si nullus imminutionis limes adsignari possit, donec fiat* $\overline{c+C} \times \frac{1}{2} T = \frac{CT}{2}$. *Si ergo terminus primus* c *denotet celeritatem infinite parvam, hoc est, talem, quæ semper imminui potest ultra omnes limites, erit summa progressionis revera æqualis* $\frac{CT}{2}$.

Sit enim inter summas $\overline{c+C} \times \frac{1}{2} T$, & $C \times \frac{1}{2} T$

ali-

aliqua differentia e. g. D; *igitur quantitas c non intelligitur ultra omnes limites determinate adſignabiles imminuta, neque eſt infinite parva, ſive talis, quæ eousque imminui poſſe intelligitur; donec data ratio æqualitatis obtineatur. Ex his iam habetur vera demonſtratio geometrica de ſpatiis motu uniformiter accelerato confectis* (§. LXXXIV.) *ſed hoc ipſum continetur ſequenti lemmate.*

§. CCXXXIII.

Lemma I. *Omnes quantitates variabiles, quæ creſcendo, vel decreſcendo ad æqualitatem accedunt propius, quam pro data qualibet differentia, fiunt ultimo inter ſe æquales.* Dem. Nam ſi ultimo eſſent inæquales, earum differentia quædam foret determinata e. g. D; Non poſſent igitur ad æqualitatem accedere propius, quam pro eadem differentia D; quod eſt contra hyp. ponuntur enim ad æqualitatem accedere propius, quam pro quavis data, id eſt, determinate adſignabili differentia.

§. CCXXXIV.

Lemma II. *Quantitates, quæ creſcendo, vel decreſcendo ſemper eandem inter ſe rationem ſervant, etiam primo, dum naſcuntur, vel ultimo, dum evaneſcunt, eandem rationem ſervabunt.* Si enim primo, dum naſcuntur, vel ultimo, dum evaneſcunt, eandem rationem non ſervarent, ſequeretur, eas *non ſemper* eandem rationem ſervare; quod pariter eſt contra hypotheſin.

Demonſtrata ſpatii ac temporis diviſibilitate, poſitaque notione infinite magni, & infinite parvi, ac explicato hoc gemino lemmate, quorum utrumque axiomatis vim habet, de quantitatibus infinite parvis ac magnis, earumque uſu differendum eſt pro inſtituto noſtro.

§. CCXXXV.

Definitio IV. Incrementa, vel decrementa quantitatum variabilium tempuſculis infiniteſimis, ſeu infinite parvis debita, adpellantur quantitatum earundem *diffe-* S *ren-*

rentiæ, *elementa*, *quantitates nascentes*, *vel evanescentes*, *aut fluxiones.* Quævis quantitas variabilis, seu fluens, id est, quæ continuo motu seu continua actione gignitur, vel extinguitur, concipi potest ac debet perducta ad eum statum, in quo est, per eiusmodi elementa, seu continua incrementa, vel decrementa infinita, sed infinite parva, id est, omni quantitate adsignabili minora. Nam continuus motus, vel continua actio non fit, nisi intra tempus continuum; quemadmodum ergo quodvis datum tempus est divisibile in infinitum, sive in tempuscula infinitesima; ita singulis tempusculis, cum ex hyp. motus & actio sint continuæ, singula incrementa, vel decrementa respondere intelliguntur, eaque numero infinita, id est, plura, quam numero determinato adsignari, vel exprimi queant, quemadmodum tempus datum in plura tempuscula, quam determinate adsignari, vel exprimi queant, dividi potest.

Sit eiusmodi quantitas variabilis ea celeritas, quæ vi acceleratrice gignitur, sitque illa determinata, sive talis, ut per eam successive genitam spatium 15 *ped. intra* 1'' *conficiatur. Hæc celeritas, cum intra tempus continuum unius minuti secundi sit genita, concipi debet collecta ex infinitis incrementis infinite parvis, uti unum minutum secundum ex infinitis tempusculis infinite parvis, quorum cuivis ob continuam actionem vis acceleratricis aliquod incrementum celeritatis respondet, coalescit; id quod ex notione motus vel actionis continuæ, & ex infinita divisibilitate temporis omnino perspicuum est. Ob hanc caussam, cum omnis data quantitas, quæ continuo motu, vel continua actione gignitur, ex eius elementis, vel differentiis infinitesimalibus coalescat, calculus, quo eiusmodi differentialia adhibentur, infinitesimalis nuncupatur; cuius est duplex methodus :* 1. directa, *quando cognita finitarum quantitatum ratione, & relatione ad se invicem invenitur relatio differentialium : quibus dein proportionales ostenduntur aliæ quantitates finitæ, quarum proin ratio hoc modo definitur.* 2. inversa, *si immediate habetur ratio, ac relatio differentialium, ex ea ratio finitarum quantitatum deducitur, quæ sunt differentialium summæ. Priori methodo continetur calculus* differentialis: *altera* integralis.

Quan-

Quantitates variabiles, id est, quæ continuo crescunt, vel decrescunt, extremis alphabeti literis x, y, z designari solent; quantitates constantes, id est, quæ aliis mutatis eædem manent, primis literis a, b &c. differentiale simplicis alicuius quantitatis litera præfixa d indicatur; ut d x est infinitesima quantitatis variabilis x. Summa e contrario omnium differentiarum finito tempore collectarum exprimitur litera ʃ. Sic ʃ x d x denotat summam ex omnibus productis x in suas differentias d x. Signum quantitatis infinitæ est ∞; & proinde infinite parva quantitas generatim exprimitur per fractionem $\frac{1}{\infty}$; *Eo minor enim fit fractio manente numeratore, quo maior fit denominator; hoc crescente in infinitum, ea decrescit pariter in infinitum. Ut iam propositæ notiones quodam schemate illustrentur, fit*

§. CCXXXVI.

Hypothesis. F. XXI. T. IV fit curvæ A C F abscissa A B, ordinata B C; in C tangens C T. Agatur alia ordinata b c T, quæ sibi parallela, motuque uniformi feratur ad ordinatam B C, ut punctum c partim ascendendo ad ordinatam B C, partim accedendo ad abscissam A B curvæ arcum C c designet, & punctum T partem tangentis T C, donec tota b c T congruat cum ordinata B C. Perspicuum est 1, abscissas A B, A b, ordinatas B C, b c, areas A B C, A b c, quæ abscissis, ordinatis, & arcubus curvæ comprehenduntur, esse quantitates variabiles; 2. Si curvam A F continuo, & regulari fluxu puncti generari concipitur, duplicem esse eiusdem velocitatem; nam alia est velocitas E C in puncto c parallela abscissæ, sive secundum directionem abscissæ parallelam; alia est velocitas E T parallela ordinatæ, sive secundum directionem ordinatæ parallelam; Dico: si punctum c eo, quem posuimus motu, curvæ arcum designet, erit velocitas E C abscissæ parallela, *fluxio* vel *differentiale abscissæ*: velocitas E T ordinatæ parallela est *fluxio* vel *differentiale ordinatæ*: rectangulum B C b E. est *fluxio* vel *differentiale areæ*: denique differentiale & incrementum nascens curvæ est recta C T.

 De

De fluxione abscissæ res manifesta est; dum enim recta bcT accedit ad BC, donec cum ea congruat, utrumque punctum c & T velocitate abscissæ parallela eodem tempore conficit idem spatium seu intervallum expressum per rectam EC; hæc igitur erit velocitas abscissæ parallelæ, quam adpello fluxionem, vel differentiale abscissæ. Altera velocitas parallela ad ordinatam BC in puncto T videtur exprimi per ET, in puncto c per Ec; estque reipsa maior in T, quam in c, antequam utrumque punctum adpellit ad C; verum quo propius puncta c & T ad C accedunt, eo minor fit utriusque velocitatis differentia, sicut ipsa puncta c & T continuo sibi propiora fiunt, ac demum in C utriusque puncti velocitates tum ad abscissam, tum ad ordinatam parallelæ fiunt omnino æquales, quia in eo limite C utrumque punctum æquidistat a recta AB, nempe intervallo BC, quod quidem intervallum velocitatem ordinatis parallelam, quæ in C datur, exprimit; & quamvis eodem tempore, quo puncta c & T veniunt in C, eodem adpellat etiam punctum E, non tamen huius, & illorum velocitates absolutæ in C æquales fiunt; quia puncta c & T non sola directione ad abscissam parallela, quemadmodum punctum E, sed etiam directione parallela ad ordinatam habent motum; quapropter puncta c & T non ideo præcise in limite C velocitatem obtinent, quia arcus Cc & recta TC evanescunt; nam & recta EC ibidem evanescit, sed quia ea puncta parem secundum utramque directionem tam abscissæ, quam ordinatæ parallelam, velocitatem in eo limite habent. Hinc ea velocitas respectu utriusque puncti c & T eodem modo in utroque puncto exprimenda; & quoniam velocitas ordinatæ parallela in puncto T exprimitur per ET, debebit eadem etiam spectando punctum c per ET exprimi, semper indicando velocitatem punctorum, qualis est in limite C, ut adeo ratio velocitatum, sive ratio, quam habet fluxio abscissæ ad fluxionem ordinatæ fit $=$ EC : ET. Denique si recta BC sibi parallela fluere concipitur versus P, fluxio vel differentiale areæ erit rectangulum BCbE spectata ea velocitate quam punctum c habet in limite C; cumque velocitas tam abscissæ quam ordinatæ paralle-

rallela punctorum c & T in limite eadem fit, recta CT tum tangentem tum arcum nascentem designabit, quia arcus curvæ non nisi bina illa velocitate designari concipitur.

Fortassis in hunc modum contra dicta obiicies; si a punctis c & T ventum est in C, non potest in hoc curvæ seu spatii puncto C concipi illorum punctorum velocitas quædam; quoniam omnis velocitas vi notionis suæ continuum tempusculum & continuum spatiolum requirit, ut proinde in unico puncto nulla velocitas, nulla velocitatis idea habeat locum. Respondeo: Nulla in unico puncto concipi potest velocitas, quæ dicitur actualis, *sive ut Scholastici aiunt, velocitas in actu secundo; hæc enim continuum tempus, & continuum spatium involvit. At concipi potest in unico spatii & temporis puncto velocitas, ut aiunt, potentialis, sive determinatio, quæ puncto fluenti & curvam generanti inest ad certam velocitatem actualem, sive ad certum spatiolum certo tempusculo conficiendum. Igitur puncta fluentia c & T in ipso curvæ puncto C, atque eo ipso momento, quo ibi existunt, determinata sunt ad habendam certam velocitatem secundum directionem tam abscissæ, quam ordinatæ parallelam. Ea determinatio cuivis spatii ac temporis limiti indivisibili respondet, etsi velocitas, seu motus actualis continuum tempus ac spatium requirat. Si quæras, quæ sit idea huius determinationis, seu velocitatis potentialis, sive quomodo eam nobis repræsentemus? R. Eam & concipimus & metimur ex spatiolo, quod certo tempusculo vi eiusdem determinationis non mutatæ, aut variatæ confici posset, ac deberet. Hinc ii, qui quantitates fluentes ac variabiles, ac fluxiones adcuratius explicant, per fluxiones non intelligunt quantitates, quæ fluendo generantur tempusculo infinitesimo celeritate continuo variata ob continuam actionem virium, sed intelligunt velocitatem ipsius fluxus, quam metitur quantitas generata per velocitatem constantem, hoc est, intelligunt velocitatem potentialem, quæ cuivis spatii, ac temporis puncto respondet, & quam nobis repræsentamus ex spatio intra datum tempus confecto. Rem hanc evidenti, ni fallor, exemplo ponam ob oculos, ut omnis tollatur obscuritas, simulque veritas huius methodi ac notionum propositarum clarissime sese menti ingerat.*

 Cor-

Corpora gravia nostræ telluris, quando libere decidunt, intra 1'' *conficiunt* 181 *digitos. Ponatur id esse spatium, quod eo tempore præcise, adcurateque conficitur; nihil enim interest hoc loco, si defectus, qualis qualis sit, penitus negligatur. Porro hac celeritate lapsu libero intra minutum secundum acquisita, si deinceps uniformiter seu motu æquabili cessante nova actione gravitatis pergerent, intra proximum minutum secundum percurreretur spatium duplum prioris* = 362 *dig.* (§. *LXXXIV.*) *Concipiatur iam quodvis corpus vel punctum A quacunque directione hac moveri velocitate uniformi, ac constante, ut intra quodvis minutum secundum conficiat* 362 *digitos; sitque aliud punctum B, quod incipiat vi gravitatis, quæ prope telluris superficiem obtinet, libere descendere, motumque uniformiter accelerare. His positis manifestum est.* 1. *Hoc punctum B, antequam omnes particulæ primi minuti secundi effluant, habebit minorem velocitatem, quam punctum A: posteaquam vero iam penitus præterlapsum est primum minutum secundum, habebit B celeritatem maiorem, quam A.* 2. *Quoniam puncto decidente B celeritas continuo crescit, nullo determinato tempusculo eius motus erit æquabilis, nec durante primo minuto secundo æquabilis illi, qui datur in puncto A; cum tamen punctum B a minore celeritate ad maiorem transit per omnes gradus intermedios, inter quos est velocitas puncti A, concipi potest, ac debet limes temporis, & spatii, in quo punctum B continua gravitatis actione ad eiusmodi velocitatem determinatum est, ut si inde ab eo limite celeritate acquisita & motu uniformi per vim inertiæ progrederetur, idem spatium eodem tempore conficeret, quod confici ponitur a puncto A. Ex his, quæ plane manifesta nemini non esse debent, pari perspicuitate intelligitur* 3: *velocitates punctorum A, & B ad æqualitatem accedunt ita, ut differentia fiat minor quavis adsignabili.* 4. *Datur limes quidam spatii, per quod fit descensus puncti B, & temporis, quo fit is descensus, in quo limite omnis velocitatum differentia denique evanescere, & velocitas utrinque æqualis fieri debeat, etsi hæc æqualitas nec ante illum limitem, nec postea, si liber descensus puncti B vi gravitatis continuetur, dari queat.* 5. *Æqualis illa puncti utriusque velocitas, unico & indivisibili temporis, ac spatii puncto respondet, proindeque duntaxat*

po-

potentialis celeritas est , seu determinatio puncti B idem spatium , quod punctum A intra minutum secundum conficit , eodem tempore conficiendi huius determinationis sive celeritate invariata. Hæc enim idea est eius determinationis , sive celeritatis potentialis , ut celeritate constante certo tempore certum spatium confici debere concipiamus, etsi nec motus actualis intra punctum spatii ac temporis dari possit, nec, si motus puncti B vi gravitatis continuetur, is reipsa æquabilis sit. Puto iam , nihil ad genuinam & Physicam rei totius explicationem deesse. Salvus igitur ac integer manet in usu infinitesimalium rigor geometricus demonstrandi , neque unquam pro æqualibus sumuntur ea, quibus aliqua differentia utut minima reipsa competit; sed dum quædam quantitates ad æqualitatem ita accedunt , ut in quodam limite omnis differentia evanescat, hanc limitis æqualitatem iis quantitatibus adsignamus ; quamquam sive in usu infinitesimorum dicamus , ea contemni, & negligi, sive veram æqualitatem indicemus, error nullus est; siquis enim reipsa esset , is in se foret determinatus & finitus; & cum infinitesima decrescant ultra quosvis limites , etiam is error decresceret ultra quosvis limites , proinde etiam infra limites erroris vere existentis ; quod absurdum esse nemo non videt ; esset enim error ipsi simul æqualis, simul minor. Hinc pro generali regula sumi potest : Quantitates finitæ , & in se determinatæ eam habent rationem inter se adcurate, quæ in iis invenitur contemtis quibuscunque quantitatibus , quæ respectu earum sunt infinitesimæ cuiuscunque ordinis.

§. CCXXXVII.

Definitio V. *Quantitas infinitesima primi ordinis* est quævis quantitas ad arbitrium assumta , quæ concipitur imminuta ultra quoscunque limites ; quantitas vero *infinitesima secundi ordinis* est, quæ ad infinitesimam primi ordinis se habet, sicut infinitesima primi ordinis ad quantitatem finitam. Sit quantitas finita 1, infinitesima primi ordinis $\frac{1}{\infty}$; habebitur infinitesima secundi or-

 dinis,

dinis, si fiat : $1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$. Eodem modo quantitas infinitesima tertii ordinis est, quae se habet ad infinitesimam ordinis secundi, sicut haec ad infinitesimam ordinis primi; fiat igitur $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty^2} : \frac{\infty}{\infty^4} = \frac{1}{\infty^3}$. Binae quantitates infinitesimae, quae eam ad se rationem habent, quam quaevis finita quantitas habet ad aliam pariter finitam, sunt eiusdem ordinis, rationemque finitam habere dicuntur. Quapropter cum diversi sint infinitorum, & infinitesimorum ordines, si plures quantitates variabiles connexae sint, adcurate dispiciendum est, cuius ordinis sint singulae.

Diversi eiusmodi ordines tum ex ipsa natura proportionum, tum ex Lemmate II. (§. CCXXXIV.) haud aegre percipiuntur. Sit enim F. XIX. T. IV. arcus circuli B D infinitesimus primi ordinis, erit eiusdem arcus chorda B D, sinus rectus D E, tangens B T eiusdem arcus pariter infinitesimae primi ordinis, rationemque inter se finitam habebunt; cumque diameter sit quantitas finita, arcus B D infinitesimus, erit E B respectu diametri quantitas evanescens, & pro A E sumi potest A B; cum igitur ex Elem. sit A E (A B) : D E = D E : E B; hoc est, sinus versus E B ad infinite parvam D E, uti haec ad finitam A B, erit sinus versus arcus infinitesimi B D infinitesimus ordinis secundi; cumque sit C B : C T (C D) = E B : D T; erit excessus D T secantis arcum infinite parvum supra radium pariter infinitesimus ordinis secundi, atque ita porro de aliis.

§. CCXXXVIII.

Corollaria. I. Factum ex quantitate finita in infinitesimam primi ordinis, est infinitesimum ordinis eiusdem; nam in omni facto productum est ad multiplicandum, ut multiplicator ad unitatem; hinc si quantitas finita ponitur $= a$; infinitesima $d\,x$; erit $1 : a = d\,x : a\,d\,x$; quemadmodum igitur prima ratio est finita, ita & secunda, h. e. $d\,x$ & $a\,d\,x$ sunt eiusdem ordi-

dinis. Eſt autem ex hyp. d x ordinis primi; igitur & a d x ordinis primi.

II. Factum ex infiniteſima primi ordinis in infiniteſimam ordinis eiusdem, eſt infiniteſimum ſecundi ordinis. Nam ex natura multiplicationis eſt $1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$.

III. Univerſe factum ex infiniteſimis quantitatibus quotcunque cuiuscunque ordinis eſt infiniteſimum ordinis illius, qui reſultat ex ſumma ordinum omnium quantitatum in ſe ductarum; ſi enim primo binas quasvis in ſe ducas, factum erit infiniteſimum eius ordinis, qui reſultat ex ſumma ordinum binarum quantitatum; tum ſi hoc factum ducas in tertiam, factum erit infiniteſimum eius ordinis, qui reſultat ex ſumma ordinum facti primi, & quantitatis tertiæ; atque ita porro.

Cum in poſterum adplicationes quasdam notionum, & lemmatum hactenus expoſitorum ſubiiciemus, per tempuſculum, ſpatiolum, & univerſe per quantitatem infinite parvam denotamus infiniteſima primi ordinis, niſi exprimatur alius ordo inferior. Quodvis autem ſpatiolum, vel tempuſculum a puncto ſpatii vel temporis, quod momentum adpellant, utique diſtinguendum eſt. Punctum enim ſpatii vel temporis eſt limes earum indiviſibilis: ſpatiolum autem quodvis, ac tempuſculum ultra omnes limites dividi poſſe demonſtravimus.

§. CCXXXIX.

Adplicatio Lemmatum.

I. *Spatium celeritate finita & conſtante confectum intra tempuſculum infiniteſimum eſt infiniteſimum primi ordinis.* Nam cum ſit S = C T, erit hoc caſu ſpatium uti factum ex quantitate finita C in infiniteſimam T. §. præc. n. I. Idem patet ex eo, quod ſpatia celeritate conſtante confecta ſint ut tempora; quemadmodum ergo tempori finito ſpatium finitum; ſic tempuſculo infiniteſimo primi ordinis ſpatium eiusdem ordinis reſpondet.

S 5 II.

II. *Celeritas per vim acceleratricem quamlibet quodam tempusculo genita, est infinitesima primi ordinis.* Si enim vis acceleratrix celeritatem finitam gigneret intra tempusculum, tempore finito, quod infinitis constat tempusculis; infinita gigneret incrementa celeritatis finitæ, id est, celeritas evaderet omnino infinita; quia vis acceleratrix continuo agit, & corpus vi inertiæ acquisitam celeritatem semper conservat; igitur corpus tempore finito infinitos gradus celeritatis finitæ, id est, celeritatem plane infinitam acquireret; nulla igitur vis acceleratrix tempore infinite parvo celeritatem finitam acquirit; si autem vis acceleratrix non nisi infinitesimam secundi ordinis celeritatem gigneret quodam tempusculo, hæc celeritas tempore finito non nisi infinitesima primi ordinis, hoc est, nulla evaderet; nam infinite parvum respectu finiti evanescit.

III. *Spatium celeritate infinite parva intra tempusculum infinitesimum percursum, est infinite parvum, seu infinitesimum secundi ordinis.* Nam celeritate *finita* intra tempusculum infinitesimum percurritur spatiolum infinite parvum primi ordinis (Ex n. I.) igitur celeritate infinities minore spatium infinities minus eodem tempore conficitur, nempe infinitesimum ordinis secundi. Id non obstat, quo minus spatium vi acceleratrice confectum tempore finito pariter finitum evadat; nam intra tempus finitum infinita spatiola secundi ordinis per singulos celeritatis gradus confecta, & simul infinita incrementa graduum celeritatis in unum coalescunt; hinc spatium tempore finito confectum per binos ordines ex infinita parvitate ascendit, h. e. finitum evadit.

IV. *Quæcunque ponatur vis acceleratrix vel retardatrix uniformis, sive variabilis in quacunque ratione, motus intra tempusculum infinitesimum habendus est pro æquabili, aut poni potest, celeritatem intra id tempusculum genitam eius tempusculi initio totam fuisse productam.* Dicatur enim celeritas ante tempusculum d t acquisita C, quæ sit finitæ magnitudinis: celeritas intra tempusculum d t sit c infinitesima primi ordinis; erit spatium expressum per C d t infinitesimum primi ordinis, spatium vero confectum celeritate c infinite parva quantumcunque

que variabili confectum intra idem tempusculum dt, erit infinitesimum ordinis secundi, hoc est, nullum; proinde motus tempore infinitesimo habendus est pro æquabili. Si autem tempusculo infinite parvo solum ratio habetur celeritatis de novo productæ, ea etsi sit infinite parva; tamen, quoniam id tempusculum in infinitas particulas est divisibile, pariter ex infinitis particulis, quas *sollicitationes* adpellant, coalescit; hinc si ratio celeritatis intra id tempusculum genitæ petitur, revera petitur celeritas finalis sive in fine eius tempusculi acquisita; cumque sit $S = \frac{CT}{2}$ (§. LXXXIV.) & tempusculum ponatur constans, erit C seu celeritas finalis $= 2S$; hoc est, æqualibus tempusculis infinite parvis celeritas, ac proin ipsa etiam vis acceleratrix, cuius ea mensura est, eandem rationem habet, ac duplum spatiolum infinite parvum secundi ordinis, quod mobile ob celeritatem tunc productam percurrit. Ac si vis acceleratrix ea variari ponitur in ratione quadam distantiarum, tamen ea pro constante, & uniformi habenda est, quia intra tempusculum infinitesimum spatium confectum, seu variatio distantiæ non nisi infinitesima secundi ordinis est; quod quidem plenissime intelligetur, si in memoriam revocentur ea, quæ in Schol. §. CCXXXVI. de celeritate invariata supra diximus.

Spectata divisibilitate temporis ac spatii, ac notione continui manifestum est, lineam non constare ex adgregato punctorum, sed ex aliis lineis minoribus, ac generari fluxu continuo puncti: nec superficiem ex lineis constare iuxta se positis, sed motu lineæ produci; denique nec solidum ex superficiebus sed ex aliis solidis minoribus componi, quæ continuo fluxu superficiei generantur. Hæc cum parum expenderent Veteres Physici, ac Metaphysici, in maximas tenebras, atque innumerabilia sophismata inciderunt, quæ passim in scriptis Veterum Philosophorum, cum de continuo disputant, reperire est; illud ego miror, hæc principia ac lemmata geometriæ infinitorum superiora captu discentium a non nullis existimari, cum omni retro tempore adolescentibus plurimæ difficultates ad continuum

per-

pertinentes fuerint propositæ; at cur tandem non illa sophismata, solas autem sophismatum solutiones, quæ ex notionibus ac principiis hic indicatis petuntur, discentium captum excedere iudicemus?

CAPUT II.

De motu Penduli simplicis & compositi.

Ope quantitatum infinitesimarum a legibus descensus corporum per plana composita ad descensum eorundem per canales curvilineos, atque ad motum pendulorum pervenimus. Quapropter quæ hic explicanda sunt, citra alias generales leges motus curvilinei percipi possunt. Eas proin sequenti capiti reservamus.

§. CCXL.

Propositio I. *Siquod corpus descendit per planum compositum, & in flexibus planorum partialium nihil celeritatis amittit, eam in fine habet celeritatem, ac si ex unico plano eiusdem altitudinis perpendicularis descendisset.* Sit F. XXII. T. IV. planum compositum ex planis AB, BC, CD. Dico, si per hæc plana coniuncta descendat, & in flexu B, & C nihil celeritatis amittat; eandem in fine D habebit celeritatem, ac si per unicum planum ED eiusdem altitudinis perpendicularis descendisset. Producatur & planum CB in G, ac demittatur perpendiculum GK. Quoniam celeritas in fine descensus per planum acquisita eadem est, ac si corpus per eius altitudinem descendisset (§. CIX. n. III.) eadem erit corporis ad B pervenientis celeritas, sive ex G, sive ex A pervenerit in B; si igitur in flexu B nullam celeritatem amittat, pari celeritate pergit in C, quæ nempe est in ratione subduplicata altitudinis perpendicularis GK, vel EI. ac si in C nihil celeritatis amittit, eam denique in D habebit velocitatem, ac si descendisset per ED.

Si plana AB & BC, & similiter BC & CD sub angulo finito ABG, BCE ad se inclinantur, sine dubio

bio flexus B, & C corporis celeritati obsunt, eique detrahunt. Demittatur enim ex A in planum C B productum perpendiculum A n; dico: Si corpus ex plano A B transit in alterum B C, erit velocitas per planum A B acquisita ad velocitatem, qua per B C moveri perget, uti A B ad B n; nam velocitas per A B acquisita, cum eius directio ad B C obliqua sit, resolvitur in perpendicularem A n, quae occursu, & reactione plani extinguitur, & alteram, quae directioni, & situi plani B C respondet, & post impactum in planum B C residua est. Quare si velocitas per planum A B acquisita exprimitur per rectam A B, ea erit ad velocitatem post impactum in novum planum, ut A B : B n, sive ut sinus totus ad cosinum anguli inclinationis binorum planorum. (§. *LXXVIII.*)

§. CCXLI.

Corollarium. Corpus descendens per curvam quamcunque O P F. XXII. eam in fine habet celeritatem, ac si ex altitudine perpendiculari O Q decidisset. Nam curva quaecunque est instar polygoni infinitorum laterum infinite parvorum, sive instar plani compositi ex planis infinitis infinite parvis; quod perspicuum est; si enim numerus planorum ultra omnnes limites augetur, & magnitudo eorundem minuitur, eiusmodi planum compositum abit in curvam, ita ut angulus flexus A B C infinite parum differat a duobus rectis, sive angulus inclinationis A B n fiat infinite parvus. Sit iam velocitas mobilis expressa per A B finita. Ex radio B n describatur arcus n m, erit ob B n = B m, lineola A m quantitas celeritatis amissae per mutationem directionis, sive flexum in B. Quoniam elementum arcus n m comprehendens angulum infinite parvum m B n non differt a tangente, sive a recta ex angulo recto n trianguli A B n in hypothenusam A B normali; hinc erit A B : A n = A n : A m; nam ex Elem. quodvis latus A n trianguli rectanguli A B n est media proportionalis inter hypothenusam A B, & segmentum adiacens A m. Quemadmodum igitur posito angulo A B n infinite parvo, recta A n est infinitesima respectu A B; sic erit A m infinitesima respectu A n (§. CCXXXVII) hoc est A m, seu

cele-

celeritas in flexu laterum curvæ amissa, est infinitesima secundi ordinis ; & si mobile infinita eiusmodi latera, id est, curvam finitam percurrat, non nisi infinitesimam celeritatem primi ordinis amittet, quæ nulla est relate ad celeritatem finitam.

§. CCXLII.

Definitio I. *Pendulum* est quodvis corpus, vel punctum grave ex puncto fixo suspensum, & circa illud agitabile. Si eiusmodi grave instar puncti consideretur, suspensi ex filo, aut virga gravitatis experte, pendulum vocatur *simplex* ; quale modo considerabimus, de composito acturi postea. Sit F. XXIII. funependulum C A ; in A collecta tota vis gravitatis. erit recta C D verticalis, quæ a puncto fixo C ad horizontem est perpendicularis, eritque D punctum infimum, quod a gravi ex filo C A suspenso attingi potest ; reliqua omnia puncta arcus G A., quem pendulum describit, sunt altiora.

§. CCXLIII.

Propositio II. *Pendulum a linea verticali ad aliquam altitudinem elevatum ex ea descendit per gravitatem relativam, quæ in quovis puncto arcus, quem describit, est ad absolutam, ut sinus anguli elevationis p, quem recta C A iungens punctum grave A cum puncto suspensionis C efficit cum linea verticali C D.* Elevetur pendulum ex D in A, fiatque ad C A radium perpendicularis H E, quæ est tangens arcus A D in A. Vis absoluta gravitatis expressa per A B resolvatur in vim A E secundum tangentem, & vim A F, quæ contraria actione fili ex A versus C extinguitur ; Erit igitur vis relativa, qua pendulum secundum directionem tangentis, uti in planis inclinatis, descendere nititur ad absolutam, uti A E : A B, sive ut sinus anguli O = ang. n = ang. m = angulo elevationis p ad sinum totum.

§.

§. CCXLIV.

Corollaria I. Si vis relativa in quovis dato puncto dicitur u, angulus elevationis p; vis absoluta V, sinus totus 1; erit in quovis puncto u : p = V : 1. & si ratio posterior ponitur constans, erunt vires relativæ in diversis punctis arcus, quem pendulum describit, uti sinus angulorum elevationis, vel uti sinus anguli inclinationis, quem directio gravitatis relativæ secundum tangentem AE efficit cum linea horizontali; nam demissa ex E horizontali En patet, angulum s æquari angulo O, sive angulo elevationis p. II. Quemadmodum angulus elevationis p vel angulus inclinationis s, dum pendulum identidem magis accedit ad verticalem CD, continuo variatur, & decrescit; sic neque vis relativa in diversis punctis arcus a pendulo descripti manet constans; unde motus penduli descendentis ex quadam altitudine non potest accelerari uniformiter. III. Pendulum descendens per arcum AD sequitur leges corporis descendentis per canalem curvilineum AD, similem arcui descripto, & similiter positum; utrinque enim vis absoluta gravitatis eodem modo resolveretur in vim relativam AE secundum tangentem, & vim perpendicularem AF, quæ a resistentia canalis non minus, quam a filo extingueretur. Ac si filum CA funependuli semper rectilineum manet, arcus AD ab eo descriptus, erit arcus circuli centro C radio CA descripti, uti ex Genesi circuli perspicuum est; ac tum descensus penduli per arcum CA eodem modo se habet, ac descensus per canalem circularem similem, ac similiter positum eiusdem radii cum longitudine fili. IV. Corpus per plana descendens vel per canales curvilineos, ubi nihil celeritatis in flexibus amittit, eam in puncto infimo habet vim secundum directionem horizontalem, per quam si reageretur secundum priorem directionem, qua descendit, idem spatium, vel eundem arcum eodemque tempore ascendendo relegeret, quem descendendo confecit, donec tota celeritas acquisita extingueretur. Quare cum directio penduli ad lineam verticalem pervenientis sit in latus alterum, nec illud a filo retentum aliter moveri

iam

iam possit, quam cæptum circuli arcum continuando illud ex D versus G ad æqualem altitudinem eodem tempore per sese elevari deberet ac motus perpetuo continuari; quod quidem, cur reipsa non contingat, rigiditas fili circa punctum suspensionis, aut frictio, vel resistentia medii in caussa est. Alterni itus penduli, vel reditus, qui descensum ex A ad punctum verticale D, & simul ascensum ex D versus G continent, adpellantur *oscillationes*, *aut vibrationes* penduli; solus vero descensus ex quadam altitudine ad lineam verticalem, vel solus ascensus a linea verticali ad altitudinem quandam vocatur *semioscillatio*, *aut semivibratio*. *Motus* igitur *oscillatorius* est motus corporis reciprocus, quo alternatim accedit, & recedit a quodam puncto, vel quadam linea. Punctum suspensionis C, circa quod pendulum oscillat, *centrum motus* dicitur. Oscillationes *isochronæ*, vel æquidiuturnæ sunt, quando descensus ad lineam verticalem, & ascensus versus alteram partem coniunctim semper intra æquale tempus peragitur; unde *pendula isochrona* ab oscillationibus isochronis nomen habent. V. Uti in motu per plana, per canales curvilineos, imo in lapsu quoque verticali, si præcise ratio celeritatum, spatiorum, ac temporum quæritur, non massa mobilis, & quantitas materiæ, sed sola vis acceleratrix spectatur; sic idem in motu sit penduli simplicis, ubi sola vis acceleratrix gravitatis consideratur ad determinandas durationes oscillationum. Maior massa non durationes ipsas mutat, sed id duntaxat efficit, ne oscillationes ita celeriter sistantur; cuius rei exemplum infra adferemus ex globo ligneo & metallico in eadem a centro motus distantia oscillantibus.

Ut theoria huius motus adcuratius explicari, atque adplicari ad usum queat, lemmata quædam sunt præmittenda.

§. CCXLV.

Lemma I. *Si vires, quibus corpus per datam rectam, vel curvam A H C versus datum punctum C movetur, semper sint ut spatia ad illud punctum percurrenda, ratio celeritatum, ac temporum ita determinatur*: I. Fiat

Fiat (F. XXVII.) recta AC æqualis datæ curvæ AC. Ducatur ad eam normalis DA, quæ exprimat vim, qua corpus in A ad descensum urgetur; ducta DC, exprimet ordinatæ trianguli TH, th. vires respondentes distantiis HC, hC; est enim ubique TH : th = HC : hC, seu vires ex hyp. sunt distantiis a puncto C, vel spatiis percurrendis proportionales. Cum autem secundum formulam $C^2 = SV$ (XCV.) quadrata celeritatum sint in ratione composita vis & spatioli percursi, quævis areola THth exprimet quadratum celeritatis per spatiolum Hh acquisitæ, & proin area finita DATH indicabit quadratum celeritatis per AH acquisitæ; erit igitur quadratum celeritatis per AH acquisitæ ad quadratum celeritatis acquisitæ per AC, = DAHT : DAC = $AC^2 - HC^2 : AC^2$; sunt enim triangula similia in ratione duplicata laterum homologorum. Porro describatur radio AC quadrans AMB; ducta ordinata HM, erit $HM^2 = MC^2 - HC^2 = AC^2 - HC^2$; proin inventa superius ratio quadratorum celeritatis per AH, & AC acquisitæ exprimentur per $HM^2 : CB^2$ ($= AC^2$:) ipsæque adeo celeritates per HM, CB, seu *velocitates in descensu acquisitæ erunt ut ordinatæ circuli.* II. Tempusculum, quo spatiolum Hh describitur, est ut illud ipsum spatium divisum per celeritatem, adeoque $= \frac{Hh}{HM}$, seu ducta MN ad AC parallela, $= \frac{MN}{HM}$. Sed ob similitudinem triangulorum MHC, MNm, est MN : HM = Mm : CM, adeoque $\frac{MN}{HM} = \frac{Mm}{CM}$; atque idcirco ob CM quantitatem constantem = CB, erit tempus per totum spatium AC $= \frac{AMB}{CB}$, seu ut quadrans divisus per radium; quæ cum sit quantitas constans, patet, *in hac virium hypothesi corpus ex quovis spatio AC, HC* to-

eodem tempore descendere. III. Si corpus in singulis punctis H eandem velocitatem C B haberet, quam in fine acquirit, tempusculum in spatio H h impensum foret ut spatium per celeritatem divisum, seu ut $\frac{Hh}{CB}$, & tempus totum per $AC = \frac{AC}{CB}$; idcirco erit *tempus, quod impenditur in descensu ad infimum punctum C ex quavis distantia per vim ipsi distantiæ proportionalem, ad tempus, quod ad percurrendum idem spatium motu æquabili & celeritate finali impenditur*, ut $\frac{AMB}{CB} : \frac{AC}{CB} =$ A M B : A C, seu *ut quadrans ad radium*; *aut ut semiperipheria ad diametrum.*

§. CCXLVI.

Definitio II. *Cyclois*, vel *trochois vulgaris* adpellatur curva, quam punctum quodvis peripheriæ circuli super rectam revoluti describit eo tempore, quo tota peripheria semel circumagitur. F. XXIV. Circulus MKLQ rectam A B contingat in L; tum super eadem recta A B circumvolvatur, donec longitudine A B suæ circumferentiæ æquali emensa punctum contactus L in sublime prius latum, dein circuitu facto veniat in B, ibique eandem rectam A B iterum contingat. Curva A D B eiusmodi motu a puncto L descripta, *Cyclois* dicitur. Recta A B tangens circuli revoluti, & terminata binis adpulsibus puncti L in A, & B est *basis cycloidis.* Recta D E basin secans bifariam, & perpendiculariter in E, est *altitudo*, vel *axis* cycloidis: punctum D *vertex*; circulus M K L Q, vel E D R, qui est idem in diverso situ, ex cuius scilicet motu cyclois oritur, est *circulus generator*, eiusque punctum L, quod curvam ipsam designat, *punctum lineans.* Denique recta P O ad basin parallela est semiordinata curvæ. Proprietates cycloidis ad hunc locum maxime pertinentes sunt 1. Quivis arcus cycloidis interceptus inter ordinatam, ac verticem est

eſt duplus reſpondentis chordæ ad verticem ductæ, & dimidia perimeter dupla diametri circuli generatoris: arcus D T = 2 D F; & (F. XXV.) B A = 2 A E. 2. Tangens cycloidis T S (F. XXIV.) eſt parallela chordæ reſpondenti D F; & (F. XXV.) tangens F T parallela chordæ A M. 3. Siquod pendulum longitudinis L deſcribit exiguos arcus circuli, curvatura eiusmodi exiguorum arcuum circuli proxime coincidit cum curvatura cycloidis deſcriptæ per eum circulum generatorem, cuius radius eſt dimidia longitudo dicti penduli ſeu $\frac{1}{2}$ L. Sit (F. XXV.) longitudo penduli circularis = A C = 2 E A; idemque excurrat in exiguos arcus circulares: congruent hi quidem proxime cum arcu cycloidis deſcriptæ per circulum radii E A.

§. CCXLVII.

Lemma II. *Vis reſpectiva corporis cycloidem deſcribentis, vel in canali cycloidali deſcendentis eſt ut arcus ad punctum infimum percurrendus.* (F. XXV.) Ea enim eſt vis reſpectiva urgens corpus ad deſcenſum obliquum in quovis cycloidis puncto F, quæ eſſet in plano tangente F T, ſive in plano chordæ M A ipſi tangenti parallelo (Ex proprietate 2. cycloidis) ſi igitur gravitas abſoluta corporis deſcendentis exprimatur per E A, ac reſolvatur in duas E M, M A, erit vis cycloidem normaliter premens ut E M ob angulum E M A in ſemicirculo rectum: vis autem reſpectiva ut chorda M A, ſeu eius duplum, nempe ut arcus F A (ex l. propr. cycloid.) itaque erit ubique vis reſpectiva ut arcus percurrendus.

§. CCXLVIII.

Corollarium I. Locum igitur in motu per cycloidem omnia habent, quæ Lemm. I. §. CCXLV. de vi in ratione ſpatiorum percurrendorum agente oſtendimus; ac *Primo* celeritates acquiſitæ ſunt, ut ordinatæ circuli. *Secundo* tempus deſcenſus per quemvis cycloidis arcum usque ad punctum infimum A ſemper eſt idem; proin cyclois eſt curva iſochrona, ſeu tautochrona, id eſt, deſcenſus æquidiuturni. *Tertio* tempus,

quod impenditur percurrendo cuivis arcui cycloidis F A vi proportionali ipsi arcui, est ad tempus, quod ad percurrendum arcum eundem motu æquabili ac celeritate finali impenditur, ut semiperipheria circuli ad diametrum. Unde sequitur *Quarto*: tempus descensus per quemvis cycloidis arcum usque ad infimum punctum ad tempus lapsus liberi perpendicularis per diametrum circuli generatoris in eadem est ratione, nempe ut semiperipheria ad diametrum; nam in descensu per arcum B A, & diametrum E A, cum eadem utrinque sit altitudo perpendicularis, eadem acquiritur velocitas (§. CCXLI.) Jam tempus, quo celeritate in A acquisita motu æquabili percurritur arcus B A = 2 E A, æquale est illi, quo motu accelerato conficitur spatium prioris subduplum, nempe E A; igitur si hoc tempus substituitur in n. 3. erit tempus descensus per quemvis arcum cycloidis usque ad punctum infimum ad tempus lapsus liberi perpendicularis per diametrum circuli generatoris, ut semiperipheria ad diametrum; & quoniam tempus ascensus versus alteram partem, qui una cum descensu integram oscillationem in cycloide efficit, est æquale tempori descensus, hinc erit tempus, vel duratio unius oscillationis in cycloide ad tempus liberi descensus per diametrum circuli generatoris, ut peripheria ad diametrum.

Sunt aliæ quoque miræ proprietates tum cycloidis, tum motus in eadem, uti quod corpus per arcum cycloidis B F A ex B in A breviore tempore descendat, quam per quamcunque lineam iisdem punctis terminatam; hinc curva brachystochrona, seu brevissimi descensus dicitur.

§. CCXLIX.

Propositio III. *Tempora seu durationes oscillationum per exiguos arcus circuli sunt in ratione composita ex directa subduplicata longitudinum pendulorum, & reciproca subduplicata gravitatis acceleratricis.* Sint bina pendula circularia A & B; sintque durationes oscillationum D & d, longitudines L & l; tempora descensus per dimidiam utrinque longitudinem T & t, gravitates acce-

ce-

celeratrices G, & g; dico esse: $D : d = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$.

Dem.

1. Ex proprietate cycloidis tertio loco indicata (§. CCXLVI.) si quod pendulum longitudinis L describit exiguos arcus circulares, curvatura eiusmodi exiguorum arcuum circuli proxime coincidit cum curvatura cycloidis descriptæ per circulum generatorem, cuius radius æquat $\frac{1}{2}$ L. Hinc durationes oscillationum per exiguos arcus circuli eædem sunt, ac tempora motuum in cycloide, cuius axis est dimidia longitudo penduli in circulo oscillantis; & sicut in cycloide tempora motuum, ita & durationes oscillationum per exiguos arcus circuli sunt ad tempus descensus per dimidiam longitudinem penduli, ut peripheria ad diametrum; erit igitur

$$D : T = \pi : \delta$$

& $$d : t = \pi : \delta$$

proinde $$D : d = T : t.$$

2. Ex theoria motus uniformiter accelerati tempora liberi descensus perpendicularis sunt in ratione composita ex directa subduplicata spatiorum, & reciproca subduplicata virium acceleratricium; nam §. XCV. n. I. $V = \frac{S}{T^2}$; proin $T^2 = \frac{S}{V}$ & $T = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{V}}$. Hinc erunt tempora descensus per dimidias $\frac{+}{}$ longitudines pendulorum in ratione subduplicata earundem directe, & subduplicata gravitatis acceleratricis reciproce, seu

$$T : t = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{\frac{1}{2} l}}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$$

3. Comparatis igitur rationibus utriusque numeri præc. erit

$$D : d = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}.$$

§. CCL.

Corollarium I. *Duratio unius oscillationis per exiguum arcum circuli est ad tempus liberi descensus per duplam longitudinem penduli, sive per diametrum circuli, cuius exiguum arcum pendulum describit, ut semiperipheria ad diametrum.* Nam si tempus descensus per dimidiam longitudinem penduli dicatur T, erit tempus descensus per duplam longitudinem, sive per spatium quadruplo maius $= 2\,T$ nempe in ratione subduplicata §. LXXXVII. Unde cum sit ex numero 1. demonstrationis $D : T = \pi : \delta$; erit $D : 2\,T = \pi : 2\,\delta = \frac{1}{2}\,\pi : \delta$. Et quia duratio semioscillationis, sive tempus descensus per exiguum arcum circuli usque ad lineam verticalem est dimidium durationis integræ oscillationis, habebit duratio semioscillationis seu $\frac{1}{2}$ D ad tempus descensus per duplam penduli longitudinem $= 2\,T$, rationem prioris subduplam, seu $\frac{1}{2}\,D : 2\,T = \frac{1}{4}\,\pi : \delta$ h. e. *Duratio semioscillationis, sive tempus descensus per exiguum arcum circuli usque ad lineam verticalem se habet ad tempus liberi descensus per diametum eiusdem circuli, ut quadrans peripheriæ ad diametrum*; & quia corpus eodem tempore per quamvis chordam, vel subtensam descendit, quo per diametrum circuli (§. CXIV.) erit tempus descensus per arcum ad tempus descensus per subtensam eiusdem arcus, ut quadrans peripheriæ ad diametrum hoc est, ut $\frac{355}{4} : 133 = 355 : 532$ posita ratione peripheriæ ad diametrum $= 355 : 133$. Ex his palam fit paralogismus, in quem viri haud sane ignobiles in re literaria inciderunt, putantes, arcum circuli exiguum, & chordam eodem tempore percurri, propterea quod magnitudine haud multum inter se discrepent. At enim, etsi chorda cum exiguo arcu prope congruat, alia tamen est chordæ, alia arcus seu tangentis inclinatio; quapropter vires respectivæ, quæ sunt uti sinus angulorum inclinationis (§. CCXLIV.) minime æquales sunt.

§.

§. CCLI.

Corollarium II. Ex analogia n. 3. demonftrationis inventa enafcitur formula: $D = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{G}}$; Hinc vero deducitur *Primo*: Si manente eadem vi acceleratrice mutatur longitudo penduli, erunt durationes ofcillationum per exiguos arcus circuli in ratione directa fubduplicata longitudinum, feu $D = \sqrt{L}$. Sit longitudo penduli $A = 1$; longitudo penduli $B = 4$; erit $D : d = 1 : 2$; five quævis duratio ofcillationis in pendulo B duplo longiore tempore durabit, quam in A. *Secundo* viciffim in eadem hypothefi conftantis gravitatis acceleratricis, erunt longitudines pendulorum in ratione duplicata durationum feu $L = D^2$. *Tertio.* Si durationes ofcillationum in binis pendulis funt æquales, five fi in proportione ponitur $D = d$; erit $\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{G}} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$ & $\sqrt{L} : \sqrt{l} = \sqrt{G} : \sqrt{g}$; ac $L : l = G : g$ hoc eft longitudines pendulorum ifochronorum funt ut gravitates acceleratrices. *Quarto.* Si longitudo binorum pendulorum eft eadem, erit $D = \frac{1}{\sqrt{G}}$, & $D^2 = \frac{1}{G}$, h. e. Vires acceleratrices funt reciproce ut quadrata durationum, & viciffim.

§. CCLII.

Corollarium III. Si fingulæ ofcillationes in unoquoque pendulo fint inter fe ifochronæ, fequitur, ut numerus ofcillationum a binis pendulis eodem tempore e. g. intra 24 horas confectarum fit reciproce ut duratio fingularum ofcillationum; nam totum tempus externum e. g. 24 hor. intra quod pendulum fuas ofcillationes continuat, erit ut factum ex duratione unius ofcillationis in numerum omnium; fi igitur durationes ofcillationum in binis pendulis fint D, & d; numeri earundem N, & n; erit tempus, intra quod pendulum

A oscillationes suas peragit, $=$ D N; & tempus, intra quod oscillat pendulum B $=$ d n; ac si tempus assumitur aequale, erit D N $=$ d n; proinde D : d $=$ n : N $= \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}} = \sqrt{L} \times \sqrt{g} : \sqrt{l} \times \sqrt{G}$

Hoc est *numeri oscillationum aequali tempore confectarum sunt reciproce ut durationes earundem, vel in ratione subduplicata gravitatis acceleratricis directe, & subduplicata longitudinis reciproce*; Hinc vero sequitur *Primo* : $n^2 : N^2 = \frac{g}{l} : \frac{G}{L}$, quadrata numerorum oscillationum intra idem tempus confectarum sunt directe ut gravitates acceleratrices, & reciproce ut longitudines. *Secundo* Si numeri oscillationum eodem tempore confectarum a binis pendulis sint aequales, gravitates acceleratrices erunt directe ut longitudines; si enim n $=$ N, erit $n^2 = N^2$; consequenter $\frac{l}{g} = \frac{L}{G}$, ac $l : L = g : G$.

Tertio. Si gravitas acceleratrix est constans, erit $n^2 : N^2 = \frac{1}{l} : \frac{1}{L}$ hoc est, in hypothesi gravitatis constantis longitudines pendulorum sunt reciproce ut quadrata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum.

Haec vere theoria est motus penduli simplicis; quae eidem opponi possunt, ex dictis resolvuntur; ac in primis intelligitur, eum motum a gravitate oriri, quae impedita verticali directione oblique deorsum tendit, uti in planis inclinatis. Ob vim autem diversam in diversis arcus descripti punctis nequit is motus uniformiter accelerari; ascensus versus alterum latus oritur ex celeritate in descensu acquisita, donec ea celeritas contraria actione gravitatis relativae extinguatur. Porro quoniam pendulum compositum ope centri oscillationis ad simplex revocandum est, uti paullo post explicabimus, usum & adplicationem theoriae hoc loco subiungemus.

§.

§. CCLIII.

Adplicatio Theoriae.

I. *Ope pendulorum gravitas corporum terrestrium in diversis terrae locis examinari potest*; Nam si idem pendulum, sive pendula *eiusdem longitudinis* non eundem numerum oscillationum eodem tempore ubique absolvant; necesse est, ut gravitas corporum in diversis terrae locis sit diversa; nam ex corollario praec. si longitudo pendulorum est constans, numeri oscillationum eodem tempore peractarum sunt directe ut radices quadratae gravitatis acceleratricis, sive gravitates directe ut quadrata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum. Pariter si pendula isochrona sunt inaequalis longitudinis, erunt etiam gravitates inaequales ex §. CCLI. n. 3. Hoc modo deprehensum reipsa est, corporum terrestrium gravitatem maiorem esse versus polos, quam prope aequatorem; maiorem itidem in locis terrae humilioribus, minorem in altioribus; id quod sequentes observationes ostendunt. *Primo* Richerius, cum anno 1672 fixarum transitum per meridianum in Cayennae insula latitudinis borealis 4°, 5′5 observaret, agnovit, pendulum, quod singulis minutis secundis unam oscillationem absolverat Parisiis, tardius moveri, unaque linea cum $\frac{1}{4}$ lin. corripi debere, ut ibi pariter singulis minutis secundis oscillationem unam absolveret; Halleius postea, aliique complures retardationem penduli prope aequatorem, & consequenter gravitatis imminutionem repetitis experimentis confirmarunt. *Secundo* Bouguerius adhibitis omnibus correctionibus caloris, ac repetitis observationibus determinavit longitudinem penduli singulis minutis secundis oscillantis in diversis ab aequatore, vel a centro terrae distantiis. Parisiis eam longitudinem statuit 440, 67 lin. sub aequatore vero, & in ipsa maris libella lin. 439, 21. Quinti, quae urbs 1466 hexapedis supra libellam maris attollitur, lin. 438, 88. In vertice montis Pichincha, qui 2434 hexapedis supra eandem libellam eminet, lin. 438, 69. Ad Portobello in America lin. 439, 30. In insula S. Dominici ad Petit goave lin. 439, 47. *Tertio*, Caillius in Affrica ad promontorium bonae spei,

eadem Bouguerii methodo usus longitudinem penduli isochroni invenit 440, 14 & latitudinem promontorii $33^{\circ}, 18'$: Grischowius longitudinem penduli singulis minutis secundis oscillantis Petropoli statuit 441, 23. Londini ex observationibus a Maupertuisio institutis longitudo eiusmodi penduli est 440, 75. Pelli in Laponia 441, 27. Romae demum Newtoni interpretes Le Seur, & Jacquier longitudinem penduli definierunt 39, 0974 dig. Londinens. sive 440, 38 lin. Ex his patet, longitudinem penduli singulis minutis secundis oscillantis, sive *pedem horarium*, ut vocant, minime constantem esse in omnibus terrae locis, sed maiorem versus polos & in locis humilioribus, minorem versus aequatorem, & in locis sublimioribus; unde etiam vis acceleratrix gravitatis in illis locis est maior, in his minor ex n. 3. §. CCL. Duratio unius oscillationis definitur, dum singulae oscillationes, quae intra unam fixarum revolutionem fiunt, numerantur; invento hoc numero etiam duratio unius oscillationis determinatur comparando eundem cum numero minutorum secundorum, qui uni revolutioni fixarum respondet; est autem revolutio fixarum $23^{h}, 56'. 4''$. Praeterea ex datis numero oscillationum intra revolutionem fixae peractarum, ac longitudine penduli invenitur longitudo pedis horarii ex n. 3. §. CCLII. Vel quia datum tempus e. g. unius horae $= 3600''$ exprimitur per factum ex duratione unius oscillationis in numerum omnium intra id tempus confectarum, ut sit $3600'' = D\ N$; erit duratio unius oscillationis $= \frac{3600}{N}$. Porro quoniam posita gravitate constante, uti in eodem loco, durationes oscillationum sunt directe ut radices quadratae longitudinum (§. CCL. numero primo) hinc si pendulum L intra horam seu $3600''$ habeat numerum oscillationum N; haud aegre invenitur longitudo penduli l singulis minutis secundis

oscil-

oscillantis; fiat enim $\frac{3600}{N} : 1 = \sqrt{L} : \sqrt{l}$; eritque $l = \frac{L N^2}{12960000}$.

Fuere, qui inæqualitatem oscillationum eiusdem penduli aliis externis caussis adscribere conati sunt; ac primo quidem diverso calori aut frigori diversarum regionum; sic enim aiunt: per calorem Zonæ torridæ pendulum extendi, & ob auctam longitudinem tardius oscillare debet; contra polari frigore constrictum, & diminutum celerius. R. Aliqua oscillationum inæqualitas aliquando refundi potest in calorem & frigus; id vero concedo; at omnem, ac tantam quidem, quantam observationes exhibent, refundi posse in calorem, ac frigus; id nego. Newtonus L. 3. Prop. 20. sextam lineæ partem, qua pendulum prope æquatorem corripi debuit, caloris vi virgam producenti adscribit. Quodsi etiam paullo maiorem extensionem calore effici concedamus, certe tanta non est; quæ omnem inæqualitatem oscillationum induceret. Nec vero eiusmodi anomaliæ, quæ calori aut frigori adscribendæ sunt, neglectæ fuerunt ab observatoribus astronomis. Maupertuisius cum sociis versus polos observantibus sollerter curavit, ut circa pendulum ea per 4 dies conservaretur aeris temperies, quam themometron Parisiis signare consuevit; nec tamen consensum inter vibrationes Parisinas, & polares obtinuit. Caillius in Act. Acad. Berolinensis An. 1753 censet, experimenta sub æquatore, Parisiis, & Pelli ultra polarem circulum instituta eo adcurationis perducta esse, ut intra octavam lineæ unius partem exhibuerint veram penduli longitudinem; nec in aliis experimentis ad promontorium bonæ spei a se habitis latiores errorum limites agnoscit. Denique cum in edito monte Pichincha regio aeris frigidior, quam in subiecta valle esse debuit, oscillationes in monte factæ ob contractionem virgæ celeriores esse debebant, contra ac observationes ostenderunt. Aiunt 2: inæqualitas oscillationum a diversa aeris densitate, raritate, humiditate, vel siccitate oriri potuit. R. n. Quia oscillationes a gravitate proveniunt, durationes earundem, quamdiu constans est longitudo ac gravitas acce-

le-

leratrix, necessario eædem sunt. Si bina corpora eiusdem voluminis sed diversæ gravitatis specificæ e. g. globus ligneus, & metallicus in eodem medio oscillant, ita, ut longitudo penduli utriusque sit eadem, durationes oscillationum per breves arcus circuli, quamdiu durant, semper æquales sunt, ita ut post trecentas oscillationes nullum discrimen quoad tempus observetur, quam quod arcus corporis levioris, nempe globi lignei, continuo breviores evadant, donec motus eiusdem penitus sistatur, dum interea globus metallicus suas oscillationes triplo longiore tempore continuat; Ergo, si idem corpus in diversis mediis oscillat, durationes oscillationum, quamdiu gravitas acceleratrix, & longitudo penduli non mutantur, mutari haud possunt. Aiunt: inæqualitas oscillationum a motu vertiginis terræ oriri potuit, ob quem corpora sub æquatore magis recedere a centro terræ conantur, adeoque minus gravitant. R. Hoc quidem modo inæqualitas oscillationum non aliunde proficiscitur, nisi a diversa gravitate. Cur porro ea gravitas varia sit in locis variis, non est hoc loco investigandum. Illud dico in præsenti, subductis calculis inæqualitatem oscillationum maiorem esse repertam, quam quæ soli motui vertiginis adscribi queat.

§. CCLIV.

II. *Data longitudine penduli, quod intra minutum secundum semel oscillat, adcurate inveniri potest spatium, quod a gravi intra idem tempus eodemque loco per lapsum verticalem conficitur; id quod per observationem corporis ipsius decidentis non nisi propinqua ratione quadam determinatur.* Ex primo numero demonstrationis (§. CCXLIX.) invenitur tempus T, quo lapsu libero percurritur dimidia longitudo penduli; reliqui enim proportionis termini noti sunt. Dein quia in motu uniformiter accelerato spatia sunt, ut quadrata temporum, fiat: ut quadratum temporis inventi per dimidiam longitudinem penduli ad quadratum unius minuti secundi, sive ad quadratum de 60‴; ita dimidia longitudo penduli ad spatium intra 60‴ conficiendum. Sit longitudo penduli, quam Mairanus magna adhibita diligentia reperit = 440, 57 lin. erit dimidia longitudo = 220, 285.

Sic

Sit ratio peripheriæ ad diametrum $= 355 : 113$. Igitur erit primo : ut 355 ad 113 ; ita duratio unius oſcillationis ſive $60'''$, ad quartum terminum $= 19\frac{35}{355}$; quod eſt tempus T lapſus liberi per dimidiam longitudinem penduli ; tum fiat : ut quadratum huius temporis ad dimidiam longitudinem penduli ; ita quadratum de 60 ad ſpatium intra minutum ſecundum lapſu libero percurrendum ; ſive

$$\left(19\tfrac{35}{355}\right)^2 : 220,285. = 3600 : x.$$

$$\tfrac{45968400}{126025} : 220,285 = 3600 : \tfrac{99941121650000}{45968400}$$

$$= 2174,128 \text{ lin.}$$

quartus terminus indicat ſpatium primo minuto ſecundo percurrendum a corpore gravi libere decidente ; quod ad pedes reductum conficit 15 ped. 1 pollic. 2 lin. cum modico exceſſu.

§. CCLV.

III. *Gravibus ſuſpenſis inſtar penduli deſideratus gradus velocitatis in machina percuſſoria communicari poteſt.* De machina percuſſoria egi in Scholio generali §. CXV. n. IV. Nunc eius fundamentum indicandum eſt ; In uſu eius machinæ, atque in experimentis de corporum conflictu neceſſe eſt, ut corpori incurrenti determinatus gradus celeritatis communicari poſſit. Dico : ſi corpus grave ſuſpendatur inſtar penduli, ut deſcribat arcus circuli, & ſi ex infimo puncto F (F. XIX.) circulo adcommodentur ſubtenſæ ut 1, 2, 3 &c. abſciſſis arcubus F 1, F 2, F 3 &c. pendulum ex his arcubus demiſſum habebit in infimo puncto F velocitates ut 1, 2, 3 &c. nam velocitates in infimo puncto ſunt ut ipſæ chordæ, quarum arcus a pendulo percurruntur ; quod ſic oſtenditur : velocitas ex N in F eſt ad velocitatem ex O in in F ut $\surd$ L F : $\surd$ PF (§. CCXL.) quoniam vero quævis chorda eſt media proportionalis inter ſegmentum adiacens, & diametrum circuli, erit chorda ad diametrum in ratione ſubduplicata ſegmenti ad diametrum ; ſive cum ſit $LF : NF = NF : GF$, erit $LF : GF = NF^2 : GF^2$ & $\surd LF : \surd GF = NF : GF$; ſimiliter $\surd PF : \surd GF$ =

$=$ O F : G F ; unde ex æquo ordinate, vel ob similitudinem rationum erit $\sqrt{LF} : \sqrt{PF} = NF : OF$; consequenter cum velocitas ex N in F sit ad velocitatem ex O in F ut $\sqrt{LF} : \sqrt{PF}$, eadem erit ut N F : O F hoc est, uti chordæ.

Sunt alii pendulorum usus multiplices & insignes in omni prope scientiarum naturalium genere ; Eadem horologiis automatis corrigendis primus adhibuit Hugenius, ita ut cycloidis arcum describerent ; animadvertit enim horologia pendulis circularibus instructa non adcuratissime oscillationes isochronas habere ; si enim arcus circulares a pendulo descripti inæquales sunt, maiores minoribus aliquanto tardius absolvuntur, ut, etsi differentiæ singulæ perexiguæ sint, tamen eædem post multas oscillationes in differentiam satis magnam coalescant. Arcuum vero circularium inæqualitas in horologio facile induci potest ; si enim lentore quodam adficiantur rotæ, ut in frigida fit tempestate, pendulum minore vi impulsum per minorem arcum excurret, atque incitatius, quam par est, festinabunt oscillationes, & citius, quam oportet, tempus ab horologio indicatum effluet. Lentius vero idem effluet tempus, si nimia lubricitate præditæ rotæ pendulum per maiorem arcum excurrere cogant. Innotuerat autem Hugenio, tempora descensuum per quoscunque eiusdem cycloidis arcus esse æqualia, & siquod ex filo flexili suspensum inter binas æquales & similes semicycloides oscillet, ita, ut filum utraque ex parte semicycloidi circumplicetur in una oscillatione, ab eodem cycloidem describi ; quapropter primus adhibuit pendula cycloidalia, sive inter binas laminas, semicycloidis curvatura donatas suspensa. Verum hoc artificium Hugenianum omittunt hodie artifices ; idque duntaxat curant, ut pendula graviore pondere onusta in arcus valde parvos excurrant. Separata ab automatis pendula ad observationes astronomicas primus admovit Ricciolus, ut testatur Krafftius. Ad medicos usus ea adhibuit Sanctorius in Medicina Statica ; quale instrumentum vocavit Sphygmicum, quo pulsuum arteriæ celeritas deprehendi potest ; quod & Schottus describit Mag. Nat. P. III. p. 338. *Galilæus ex consideratione circularium oscillationum viam sibi aperuit ad omnem theoriam gravium detegen-*

gendam ; cum enim Medicinæ operam daret , ut testatur Boscovichius in Notis ad L. II. v. 1617. Phil. Stai. cogitaretque de methodo aliqua , qua certo inæqualitatem pulsuum arteriæ in febribus cognosceret , forte lychni pendentis in templo oscillationes animadvertit æque diuturnas (ad sensum) sive multo maiores essent , ut initio solent , sive breviores multo , ut in fine , amplitudine itineris compensata per celeritatem ortam ex maiore altitudine , & minore sub initium oscillationis inclinatione ad horizontem. Ad musicos usus eadem transferre conatus est Galilæus , ut consonantias oculis repræsentaret pendulis nempe tribus , quorum , eodem tempore , facit oscillationes primum quatuor , secundum tres , tertium duas ; deinde alii ad dirigendas mensuras musicas , quas tactus vocant , adplicuerunt. Geometricum pendulorum usum iterum animadvertit Galilæus ; hinc , ait , chordæ longissimæ , cuius adspectus superior absconditus est , longitudinem metiri licet , si adpenso pondere in oscillationes cieatur , atque hæ cum pendulo datæ longitudinis comparentur. Sed iam de centro oscillationis agendum superest.

§. CCLVI.

Definitio III. *Pendulum compositum* dicitur , in quo plura pondera vel puncta gravia eodem filo inflexibili , quod gravitatis & inertiæ expers concipitur , sunt affixa in diversa a centro suspensionis distantia. Sint enim (F. XXVI.) pondera B & D suspensa e puncto A ad diversas distantias ; si singula seorsim oscillare debeant , oscillatio propioris B citius absolvetur , remotioris D serius in ratione subduplicata A B , A D. Si vero connexa sint virga rigida , quæ concipiatur inflexilis , ac omni vi inertiæ , & gravitate destituta , debebunt oscillationes simul peragere , adeoque debebit alterius motus alteri obsequi ita , ut tempus sit medium inter utrumque , quod neque tam breve sit , uti tempus solius B propioris , neque tam longum , ut tempus solius D remotioris ; erit igitur punctum quoddam C , in quo si esset utrumque corpus B , & D collectum , oscillationes eodem tempore peragerentur , dum alterum est in B in distantia A B , alterum in D in distantia A D a centro

motus,

motus, vel puncto suspensionis A. Id punctum C dicitur centrum *oscillationis*, eritque A C longitudo penduli simplicis, quod isochronum est pendulo composito. Similiter concipi potest planum A B in A suspensum, aut etiam corpus prismaticum, vel aliud quodcunque oscillare circa punctum fixum A; eritque semper aliquod punctum C, in quo si omnia pondera tam supra, quam infra C posita essent collecta, oscillationes eodem modo, eodemque tempore peragerentur, quo peraguntur a pendulo composito. Recta, quæ ex puncto suspensionis ad commune datorum ponderum centrum gravitatis ducta concipitur, vocatur *axis penduli compositi*: recta vero F A G, quæ per idem punctum suspensionis A ad axem perpendicularis ducitur, *axis oscillationis* adpellatur.

Pro centro oscillationis inveniendo ac demonstrando alii alias atque alias vias inierunt. Nulla satis plana mihi quidem videtur; quapropter aliam iuvat methodum arripere forte novam, nec inelegantem, certe facilem, & expeditam.

§. CCLVII.

Lemma. *Momentum, quod pondera ex alto delapsa in vectem, tempore percussionis exerunt in fulcrum, sunt ut quantitates motuum eorundem ducta in distantias, quas habent a fulcro.* Sit (F. XXVIII.) vectis A D fixus in A, in eumque ex quavis altitudine decidat pondus B in B, & pondus D in D. Manifestum est, quod posita distantia eadem A B pondus B eo maiorem vim exerat in A, quo maiore motus quantitate in B alliditur; ac similiter pondus D posita eadem distantia A D eo maiorem vim exeret in A, quo maiore quantitate motus in D incurrit. Posita vero eadem motus quantitate in B decidente momentum, quod versus A exerit, eo maius est, quo magis ab A distat, ac similiter pondus D servata priore celeritate, si magis removetur a fulcro A, eo maius momentum versus A exeret. Quapropter momentum ponderum in A crescit ut quantitas motus eorum ducta in distantiam a fulcro.

Hoc

Hoc quidem Lemma multiplici obſervatione, vel experimento comprobari poteſt; uti ſi in crus longius ſtateræ Romanæ demittantur corpora vel in maiore a fulcro diſtantia, vel ex maiore altitudine, ſemper maior effectus habebitur, magisque elevabitur pondus oppoſitum. Hinc prælis ad monetas ſignandas deſtinatis adcommodatur vectis longior, isque in extremitate utrinque inſtruitur globis æneis, ac mediantibus loris ad motum concitatur; creſcit enim vis tum pro quantitate motus globorum, tum pro diſtantia eorundem a fulcro. Trabs vel columna marmorea, quæ enormia pondera utrinque adpenſa ferret, ſi ex alto delapſa circa medium alliditur fulcro immobili, inſtar arundinis diſſilit. Si enim loco partium utrinque circa fulcrum poſitarum concipiantur maſſæ iis æquipollentes, vis ad fulcrum erit in ratione compoſita quantitatis motus ductæ in diſtantiam ab eodem.

§. CCLVIII.

Propoſitio IV. *Si ſingula pondera filo inflexili ſuſpenſa multiplicantur per quadrata ſuarum diſtantiarum a centro ſuſpenſionis, & ſumma factorum dividitur per ſummam factorum ex quovis pondere in ſuam a centro ſuſpenſionis diſtantiam, quotus diviſionis exhibet diſtantiam centri oſcillationis a centro ſuſpenſionis.* Dem. Motus fili inflexilis ponderibus B & D onerati, cum ſit inſtar vectis, cuius fulcrum eſt in A, pendet a *momento virium*, quod ea pondera verſus A exerunt, dum circa A tanquam centrum motus agitantur. Id momentum eſt quantitas motus ponderum ducta in diſtantiam, uti ex Lemm. præc. intelligitur. Porro ex natura motus circularis *velocitates* ponderum ſunt ut arcus deſcripti ſive ut radii; igitur *quantitas motus* ut factum ex maſſa in radium, ſive in diſtantiam a centro ſuſpenſionis; hæc quantitas motus ducta in diſtantiam ab eodem centro ſuſpenſionis exhibet *momentum virium*, quo pondera B & D verſus A agunt, ſive filum circa A rotare conantur. Si iam quæritur punctum C, in quod, ſi pondera B & D unita agant, idem circa A motus, eademque in filo flexili impreſſio conſequatur, neceſſe eſt, ut

ut inter quantitatem motus ponderis B, & D centrum gravitatis quæratur, idemque erit centrum oſcillationis. Cum ergo generatim diſtantia centri gravitatis a puncto A reperiatur, ſi ſumma factorum ex quovis pondere in ſuam a fulcro diſtantiam dividitur per ſummam ponderum (§. CXXXI.) in præſente caſu reperietur centrum oſcillationis, ſi momenta ponderum dividantur per quantitates motuum eorundem, hoc eſt, ſi quodvis pondus in quadratum ſuæ diſtantiæ ducatur, & ſumma eorum factorum dividatur per factum ex quovis pondere in ſuam a fulcro diſtantiam. Sint maſſæ B & D, diſtantiæ AB, AD; erunt quantitates motus ſeu facta ex maſſa in velocitatem circularem, ut $B \times AB$ ad $D \times AD$: momenta autem virium rotationis circa A, ut quantitates motuum ductæ in diſtantias ſive ut $B \times AB^2$ ad $D \times AD^2$. Hæc momenta diviſa per quantitates motuum exhibent centrum gravitatis in rotatione, ſive centrum oſcillationis, cuius diſtantia a centro ſuſpenſionis erit $= \frac{B \times AB^2 + D \times AD^2}{B \times AB + D \times AD}$.

Fortaſſis clarior non nemini videbitur demonſtratio eadem hoc modo adornata. Ex præmiſſo lemmate, & ratione vectis perſpicuum eſt, quantitatem motus ponderis B eſſe $= B \times AB$; & quantitatem motus ponderis D $= D \times AD$. Quæritur punctum intermedium, in quo ſi una convenirent hæ quantitates motuum, filum circa A eodem modo impelleretur, ſive quæritur potentia æquipollens, quæ eundem circa A motum in virga produceret, aut quæ contraria directione adplicata vim ponderum B & D ſiſteret. Perſpicuum eſt, diſtantiam huius puncti intermedii a B & D eſſe reciproce, ut quantitates motuum, quæ ſunt in B & D, haud ſecus, ac ſi in vectem deciderent pondera quavis motus quantitate, potentia æquipollens eſſet in puncto, a quo deſumtæ diſtantiæ non cum ſolis maſſis, ſed cum motuum quantitatibus reciprocarent. His poſitis ponatur id punctum C (*F. XXVI.*) *ac reliqua facili calculo expediuntur. Nam ex dictis erit $D \times AD : B \times AB = BC : DC$; & componendo $D \times AD + B \times AB : B \times AB = BD : DC = AD - AB : DC$;*

DC; adeoque $DC = \frac{(AD - AB)\, B \times AB}{D \times AD + B \times AB}$

Est autem distantia quaesiti puncti C a centro suspensionis

$$= AD - DC = AD - \frac{(AD - AB)\, B \times AB}{D \times AD + B \times AB},$$

seu facta reductione

$$\frac{D \times AD^2 + B \times AB \times AD - B \times AB \times AD + B \times AB^2}{D \times AD + B \times AB}$$

$$= \frac{D \times AD^2 + B \times AB^2}{D \times AD + B \times AB} = AC.$$

Quoniam vero divisor, sive summa factorum ex quovis pondere in suam a centro suspensionis distantiam aequalis est facto ex summa ponderum in distantiam centri gravitatis ab eodem centro suspensionis, vel axe oscillationis; hinc statuitur generalis regula pro inveniendo centro oscillationis: Singula penduli compositi pondera multiplicentur per quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per factum ex summa ponderum in distantiam centri gravitatis eorundem ab axe oscillationis; quotus praebet longitudinem penduli simplicis composito isochroni.

§. CCLIX.

Corollarium I. Si pondera suspensa B, D &c. sint inter se aequalia, ac ponatur quodvis $= 1$, erit distantia centri oscillationis ab axe eiusdem $= \frac{AB^2 + AD^2}{AB + AD}$. Si iam istiusmodi pondera sint infinita, distantia centri oscillationis ab axe eiusdem exhibebitur per seriem infinitam quadratorum numerorum naturalium, divisam per seriem infinitam eorundem numerorum. Est autem ex Elem. ea summa quadratorum aequalis tertiae parti facti ex quadrato termini ultimi in numerum terminorum seu $= \frac{1}{3}\infty^3$; & summa infinitorum numerorum natura-

lium æqualis facto ex termino ultimo in dimidium numerum terminorum seu $= \frac{1}{2} \infty^2$; facta igitur divisione erit $AC = \frac{2}{3} \infty$. Quare si A D sit virga gravis, inflexilis, materia homogenea constans, & figuræ ubique æquabilis, altero extremo A suspensa, habentur istiusmodi series, quarum ultimus terminus $\infty = AD$; & distantia centri oscillationis a puncto suspensionis fiet $= \frac{2}{3}$ A D, h. e. *centrum oscillationis a puncto suspensionis distat duabus tertiis partibus longitudinis totius virgæ.*

§. CCLX.

Corollarium II. Præter gravitatis & oscillationis centra in corpore moto, & in aliud corpus incurrente etiam spectatur *centrum percussionis*; idque est corporis moti punctum, in quo totum eius momentum seu vis collecta concipitur; indeque fit, ut, si corpus eo centro occurrat alicui obstaculo, maiore vi id percutiat, quam si alio quovis puncto in idem impegisset; quando corpora coniuncta progrediuntur celeritate æquali, eorum percussionis centrum a centro gravitatis, vel æquilibrii non differt. At si motu oscillatorio, & celeritate inæquali convertantur circa aliquod punctum, tum eius percussionis centrum cum centro oscillationis coincidet.

CAPUT III.

De Motu curvilineo circa centrum attrahens, ac de viribus eum motum componentibus.

Paucis verbis primo expediam ea, quæ ad curvilineum motum generatim pertinent; tum de motu circa centrum agam, quod adpello attrahens eo duntaxat sensu, quatenus mobile versus aliquod punctum continuo trahitur, sollicitatur, vel quacunque vi animatum, seu impulsum tendit, uti corpora terrestria tendunt versus centrum terræ, terra, ac reliqui Planetæ versus solem, aut quomodo lapis funda circumactus perpetuo versus manum trahitur, ut

ut in sua orbita conservetur. Nihil igitur de caussa attractionis, vel nisus versus centrum hoc loco disceptandum est; quod sane intempestivum foret, nondum explicatis legibus eius attractionis, neque naturæ phænomenis ex eiusmodi motu provenientibus adhuc perspectis.

§. CCLXI.

Propositio I. *Siquod corpus certa directione, & velocitate proiicitur, idemque per intervalla post æqualia quævis tempora finita novo semper & unico impulsu sollicitatur alia vi secundum aliam directionem a proiectione diversam agente, id describet polygonum finitis lateribus constans.* Dem. Proiiciatur corpus (F. I. T. V.) directione AV, & velocitate, qua intra quoddam tempus percurreret rectam AB; initio eiusdem temporis sollicitetur unico impulsu, vi, qua possit eodem tempore percurrere AD; abibit secundum leges motus compositi per AE diagonalem parallelogrammi ABED. Sequenti tempore abiret vi inertiæ per EG; sed si in E vis altera post intervallum novo & unico iterum impulsu agens directione quavis EF ipsum determinet ad motum per EF, percurret diagonalem EH parallelogrammi EFGH; & ita porro, quia in H continuaret motum per HK, in L per LN, in O per OQ, si in H fit impulsus per HI, in L impulsus per LM, in O impulsus per OP, describentur novæ diagonales HL, LO, OR novorum parallelogrammorum, in quibus alterum latus exprimit lineam percurrendam motu præcedente, alterum vero lineam respondentem vi detorquenti a priore directione; quapropter hoc modo describetur polygonum AEHLOR, idque finitis constabit lateribus, quia vis detorquens AD, EF, HI, LM &c. post finita temporis intervalla ponitur agere, & motus continuus est.

§. CCLXII.

Corollarium I. Quotcunque ponantur vires activæ in idem mobile concurrentes cum directionibus quibuscunque semper orietur motus ex omnibus compositus secundum theoriam §. LII. & LVI explanatam. Porro ex binis quibusvis rectis, quæ magnitudinem, & dire-

ctionem virium componentium repræsentant, semper construi potest parallelogrammum, cuius diagonalis in eodem plano iacet; hinc & directio motus compositi, quam diagonalis exhibet, in eodem iacebit plano; at si alia accedat vis unica, vel plures, quæ in plano reliquarum sitæ non sunt, directio motus compositi erit in plano, quod per diagonalem binarum quarumvis & per directionem tertiæ ductum concipitur.

§. CCLXIII.

Corollarium II. Siquod corpus certa directione, & velocitate proiectum sollicitatur secundum aliam directionem per vim *continuo agentem* sive acceleratricem, describet curvam continuam. Sint eiusmodi vires mobile a directione proiectionis A V detorquentes per A D, E F, H I, L M, O P expressæ; Si eædem continuo agant, nullum erit adsignabile tempusculum, intra quod non agant, adeoque nullum etiam erit adsignabile tempusculum, quo mobile a priore directione non detorquetur. Igitur numerus laterum polygoni finito tempore descripti crescet in infinitum, anguli vero, quos continet quodvis latus præcedens productum cum consequente minuentur in infinitum, h. e. polygonum laterum infinitorum & infinite parvorum, seu curva describetur, de qua generatim nonnulla sunt adnotanda:

I. *Ad curvam describendam opus est pluribus viribus*, quarum una saltem agit continuo; nam corpus proiectum vel impulsum per vim inertiæ semper tendit ad motum rectilineum, qui tamen, si accedat vis continuo agens, nusquam obtinetur, cum mobile perpetuo detorqueatur a priore directione.

II. *Directio proiectionis fit tangens curvæ, & in quovis curvæ puncto, si soli vi inertiæ relinqueretur mobile, per tangentem curvæ abiret.* Nam producto utrinque quovis latere H L in S & T, dum concipitur polygonum finitorum laterum describi, uti supra posuimus, si mobili in L nulla vis nova advenisset, illud abiisset vi inertiæ per L T; dum vero evanescit latus H L, & polygonum in curvam continuam abit, punctis H & L coe-

coeuntibus recta S T evadit tangens curvæ in puncto L (F. II.) & mobile per latus H L infinitesimum finite productum abiret, hoc est, per tangentem, quæ aliud non est, nisi productio finita lateris infinitesimi; ut adeo tota curva vel ex lateribus polygoni vel meris tangentibus infinite parvis composita debeat concipi. Eodem pacto productis lateribus A B in V, & A E in U, dum coeunt puncta A & E, evanescit latus A E, & A U abit in directionem proiectionis A V, & simul evadit tangens curvæ continuæ A L R (Fig. II.)

III. *Angulus inter bina quævis latera infinitesima curvæ interceptus infinite parum distat a duobus rectis.* Sint latera A E, E H infinitesima: dico, angulum A E H infinite parum differre a binis rectis. Nam G H exprimit spatium vi acceleratrice tempusculo infinitesimo confectum, adeoque est infinitesimum secundi ordinis (§. CCXXXIX. n. III.) E G vero, seu spatium celeritate finita tempusculo infinitesimo confectum, est infinitesimum primi ordinis; Hinc augulus G E H, qui est complementum anguli A E H ad duos rectos, est infinite parvus; consequenter angulus A E H inter bina infinitesima latera curvæ interceptus infinite parum distat a duobus rectis.

Hæc quidem ad motum curvilineum circa centrum, vel punctum attrahens facile transferuntur; ut tamen id corollarium, quod maximi momenti est ad naturæ investigationem magis incurrat in oculos, id instar propositionis fundamentalis exhibebimus.

§. CCLXIV.

Propositio II. *Corpus, quod circa centrum quoddam in curva revolvitur, vim duplicem habet, unam, qua ad centrum perpetuo trahitur, alteram, qua a centro conatur identidem recedere secundum tangentem; & vicissim, si corpus vi duplici, centripeta, & tangentiali simul agatur, circa centrum virium revolvetur in curva.* Propositio directa fluit ex generali lege motus (§. XXIV.) quam Philosophi, & Mathematici omnes instar axiomatis adoptarunt: *corpora per vim inertiæ pergunt unifor-*

miter in directum; quodsi ergo corpus quoddam movetur in curva, & a priore directione identidem declinet, præter vim impressam necessario requiritur vis alia, quæ illud a lineis rectis, ad quas secundum directiones tangentium per vim inertiæ nititur, continuo detorqueat. Altera inversa propositio ex propositione I. §. CCLXI. manifesto deducitur. Sit enim (F. III.) directio, & celeritas proiectionis AB: centrum virium C, in quod tenditur vi AD; describetur diagonalis AE. Altero tempusculo mobile celeritate, & directione AE abiret per EG ob vim inertiæ; sed si illo quoque tempusculo versus centrum trahitur vi & celeritate EF, in fine illius erit in H, & ita porro; aucto dein in infinitum numero tempusculorum, & magnitudine eorundem, & proinde etiam laterum magnitudine imminuta ultra omnes limites determinate adsignabiles, polygonum finitorum laterum abire in curvam continuam intelligitur ex ipsa indefinita temporis divisibilitate, & notione virium continuo agentium.

§. CCLXV.

Corollarium I. Cavitas descriptæ curvæ, eam partem respicit, in quam vis acceleratrix tendit; hinc si cæteris manentibus vis puncti C attractiva abiret in repulsivam, etiam tum describeretur curva, sed centro convexitatem obvertens.

§. CCLXVI.

Corollarium II. Hæ igitur binæ vires, quarum altera, quæ continuo agit, versus centrum quoddam, *centripeta*, vel *attractiva*, altera *proiectilis*, vel *tangentialis* dicitur, communi nomine vocantur *centrales*, quamquam hac voce sola vis centripeta sæpe denotetur. Curva descripta dicitur *traiectoria*, vel si in orbem redeat, *orbita*: centrum virium C etiam *focus*, vel *umbilicus*, nuncupatur. Lineæ AC, EC ex centro in punctum revolutum ductæ, quæque istius a centro distantias metiuntur, sunt *radii vectores*, qui una cum mobili transferri concipiuntur, vel potius ipsum mobile transvehunt

con-

conceptu noſtro, fere uti funda cum lapide circumvehitur. . Pro varia autem mobilis a centro diſtantia radii vectores creſcere, vel decreſcere concipiuntur, ac tum ſpectamus non modo arcus curvæ a mobili deſcriptos dato tempore, ſed etiam areas curvæ perimetro, & radiis vectoribus concluſas. Illud præterea addendum; quia mobile tempuſculo infiniteſimo a tangente non niſi quantitate infinite parva ſecundi ordinis detorquetur (qui eſt effectus vis centripetæ §. CCLXIII.) hinc pro arcu infiniteſimo tangens, & pro celeritate per arcum infiniteſimum celeritas & vis per tangentem ſumi poteſt, eademque eſt vis proiectionis, & tangentialis, & celeritas motus per arcus minimos.

§. CCLXVII.

Corollarium III. *Radius vector deſcribit areas temporibus proportionales*, h. e. æqualibus temporibus æquales, duplis, vel triplis duplas vel triplas; quod manifeſtum erit, ſi oſtendatur, areas triangulorum A C E, E C H, H C L &c. eodem tempore deſcriptorum æquales eſſe. Ducta recta C G, erunt triangula A C E, E C G æqualia; cum ſint ſuper æquales baſes A E, & E G, & ex eodem vertice C; eſt autem triangulum E C G æquale triangulo E C H, cum ambo inſiſtant eidem baſi C E, & ſint inter easdem parallelas E C, H G; idem vero obtinet, ſi areæ triangulorum fiant infinite parvæ, & polygonum in curvam continuam abit; utcunque enim minuantur latera, eadem conſtans manet ratio. Ex his vero haud ægre intelligitur propoſitio inverſa huius corollarii: *Siquod corpus circa datum punctum deſcribit areas temporibus proportionales, verſus illud habet vim centripetam.* Sint enim areæ A C E, E C H æquales. Producta A E tantundem in G, erit triangulum E C G æquale triangulo A C E, & proinde triangulo E C H. Cum igitur triangula E C G, E C H baſin habeant communem, erunt inter easdem parallelas G H, & E C. Quapropter ducta H F parallela ad E G motus per E H componetur ex binis motibus per E G, & E F; quorum primus cum oriatur a vi inertiæ motum præcedentem per A E continuante in directum, poſterior

rior orietur a vl tendente in C; mobile proinde vim habet centripetam versus C.

Demonstratio hæc supponit, curvam descriptam iacere in eodem plano. Cæterum areæ descriptæ æquantur dimidio facto ex arcu tanquam basi, & perpendiculo in tangentem demisso; hinc si sint arcus descripti A, & a temporibus T, & t; perpendicula arcuum P & p; erit T: t $= \frac{AP}{2} : \frac{ap}{2} = AP : ap.$

§. CCLXVIII.

Corollarium IV. *Celeritas, qua corpus circa centrum virium describit areas temporibus proportionales, in diversis eiusdem orbitæ punctis, vel arcubus infinitesimis, est reciproce ut perpendiculum ex centro virium in tangentem demissum*; Nam æqualibus temporibus æquales describuntur areæ, seu minimis tempusculis æqualia triangula, quorum bases universe sunt reciproce ut altitudines, seu perpendicula; cum igitur bases æqualium triangulorum, seu arcus minimis, & æqualibus tempusculis descripti exprimant spatia, ac proinde etiam celeritatem, quæ minimis tempusculis pro constante habetur, patet, celeritatem esse reciproce ut perpendiculum ex centro virium demissum; nempe $C = \frac{S}{T}$ in motu æquabili; est autem spatium confectum uti arcus A, & a; & tempora ex Schol. §. præc. sunt ut A P & a p; igitur erit celeritas $C = \frac{A}{AP} = \frac{1}{P}$; vel si arcus descriptus, sive celeritas dicatur C; area A; perpendiculum P; erit $A = \frac{CP}{2}$ & $C = \frac{2A}{P}$.

Hæ propositiones cum suis corollariis maximi momenti sunt in Philosophia Newtoniana; cum enim ex observationibus primarii planetæ omnes circa solem describant areas temporibus proportionales, & ex coroll. III. omne cor-

corpus, quod hac lege arearum orbitam describit, urgeatur vi quadam in ipsum centrum istiusmodi arearum; manifeste consequitur, in planetis vim gravitatis versus solem inesse. Sed antequam plura istiusmodi exempla de usu virium centralium adferamus, motus in circulo exponendus est.

CAPUT IV.

De Motu in Circulo, cuius Centrum ponitur esse Centrum Virium.

Machinam virium centralium, variaque experimenta, quae eiusdem ope fieri possunt, passim descriptam apud Auctores reperies; quapropter theoriam huius motus, tum eius in natura usum maxime declarare animus est.

§. CCLXIX.

Propositio I. *Si quod corpus vi proiectili & centripeta volvitur in circulo, cuius centrum est centrum virium, eius velocitas per totam circuli peripheriam est constans.* Velocitas enim in diversis orbitae punctis vel arcubus infinitesimis est reciproce ut perpendiculum ex centro virium in tangentem demissum (§. CCLXVIII.) cum igitur omnia perpendicula ex centro circuli in tangentem demissa aequent radium, qui constans est, patet, velocitatem quoque in hoc motu esse constantem.

§. CCLXX.

Propositio II. *Vis centripeta in circulo est in ratione composita ex directa duplicata arcuum minimis tempusculis descriptorum, sive ex directa duplicata celeritatum, & inversa simplice radiorum, sive distantiarum a centro virium, & circuli.* Sit (F. IV.) S T tangens, sive directio, secundum quam mobile nititur vi proiectionis, aut inertiae. Vim centralem, quae minimis tempuscu-

lis

lis ex effectu æſtimatur, exprimit lineola S m vel A *a*, ſiquidem vis proiectionis, aut inertiæ, qua mobile ſecundum tangentem nititur, ponitur expreſſa per S A, vel ſi hæc vis ponitur maior, expreſſa per S B, vim centripetam exprimet recta S n, vel B b; nam ex Geometria infiniteſimorum, ſi arcus S *a*, S b ponuntur infiniteſimi, ſinus verſi S m, vel S n eorum arcuum, & interceptæ inter tangentem, & arcum lineolæ A *a*, B b æquipollent. Porro menſura abſoluta virium acceleratricium non eſt ſpatiolum S m, vel S n, quod per vim centripetam, vel acceleratricem motu uniformiter accelerato intra tempuſculum infiniteſimum percurritur, ſed duplum ſpatiolum, ſive 2 S m, vel 2 S n; quia menſuræ virium ſunt ſpatia motu æquabili percurſa: at vero eodem tempore, quo motu accelerato percurritur S m, vel S n, motu æquabili, & celeritate finali conficitur duplum ſpatium = 2 S m, vel 2 S n. Dicatur vis centripeta V; erit V = 2 S m vel = 2 S n. His poſitis conſtat ex elementis, ſi ex eodem extra circulum puncto A duæ ducantur rectæ, altera tangens A S, altera ſecans A d; tangens A S eſt media proportionalis inter totam ſecantem, & eius partem A *a* extra circulum. Erit igitur $Aa = \frac{AS^2}{Ad}$; quia vero arcus infiniteſimi non differunt a tangentibus, & præterea lineola A *a* reſpectu diametri evaneſcit, erit $Aa = \frac{Sa^2}{ad}$. Et quoniam vis centripeta V exprimitur per 2 S m, vel 2 A *a*, erit $V = \frac{Sa^2}{\frac{1}{2}ad} = \frac{C^2}{D}$, ſi celeritas quæ eſt ut arcus S *a* deſcriptus dicatur C, & radius ſive $\frac{1}{2}$ *a* d, cum ſit diſtantia mobilis a centro virium & circuli, ponatur = D. Si celeritas proiectionis, aut motus, quo fertur mobile in circulo ponitur maior, & exprimatur per S B, vel S b, erit vis centripeta pariter maior in ratione $\frac{Sb^2}{\frac{1}{2}be}$. Quæcunque autem ponatur celeri-

leritas proiectionis, & vis centripeta, illa intra tempusculum infinitesimum semper infinities maior est, nimirum infinitesima primi ordinis, hæc infinitesima secundi ordinis (§. CCXXXIX. n. I. & III.) tempore finito utriusque effectus fit finitus; quod de vi tangentiali manifestum est; sed de vi quoque centripeta haud ægre perspicitur; cum enim tempus finitum ex infinitis tempusculis coalescat, effectus vis centripetæ, si eius actio non repeteretur, evaderet infinitesimus primi ordinis; ob repetitam autem continuo actionem uno præterea gradu altior, sive finitus evadat, necesse est. Etsi vero actio vis centripetæ sit continua; non tamen idcirco sequitur, ut mobile identidem magis ad centrum accedat, nam eius effectus est, ut mobile continuo a tangente retrahat, sive impediat, ne magis, ac antea, discedat a centro.

§. CCLXXI.

Corollarium I. Dici potest: *Vis centripeta in diversis circulis est ut quadratum celeritatis divisum per diametrum;* Nam eadem est ratio radiorum, & diametrorum, sive simplicis ad simplum, ut dupli ad duplum.

§. CCLXXII.

Corollarium II. *Vis centripeta in diversis circulis est in ratione composita ex directa simplice radiorum, sive distantiarum a centro virium, & reciproca duplicata temporum periodicorum;* cum enim celeritas in motu circulari sit constans, ea erit directe ut spatium percursum, & reciproce ut tempus, secundum formulam $C = \frac{S}{T}$.

Porro spatia percursa sunt ut peripheriæ hæ ut diametri, vel radii, id est, distantiæ a centro virium; erit igitur $C = \frac{D}{T}$; & $C^2 = \frac{D^2}{T^2}$; si igitur hic valor substitui-

tur

tur in formula $\frac{C^2}{D}$, quæ vim centripetam exprimit, ea erit $= \frac{D^2}{D\,T^2} = \frac{D}{T^2} = V$.

§. CCLXXIII.

Corollarium III. Quoniam in æſtimanda vi centripeta V hactenus duntaxat vim acceleratricem gravitatis ſpectavimus, facile intelligitur, vim motricem eo maiorem eſſe, quo maior eſt maſſæ revolutæ quantitas; ſit ea $= M$; erit vis motrix gravitatis $= \frac{M\,D}{T^2}$, ſive *in ratione compoſita ex directa maſſæ, & diſtantiæ a centro virium, & reciproca duplicata temporum periodicorum.* Ex qua formula pronum eſt, complura theoremata pro experimentis virium centralium derivare; nam in motu aſtrorum, ad quem hæc theoria maxime refertur, nullam rationem maſſæ in centrum virium tendentis, ſed maſſæ duntaxat attrahentis, ſive illius, in quam tenditur, habendam eſſe docebimus. Si autem exercitationis cauſſa ſpectantur maſſæ, ſint in binis corporibus circulos deſcribentibus, vires centripetæ V, & u; diſtantiæ a centro virium D, & d, tempora periodica T, & t, maſſæ M, & m; ſitque $M = 3$ $m = 5$. $D = d = 3$. $T = t = 2$; erit $V : u = \frac{9}{4} : \frac{15}{4} = 3 : 5$ hoc eſt, ſi tempora periodica & diſtantiæ a centro virium utrinque eædem ſunt, vires centrales ſunt ut maſſæ. Sit $M = m = 5$. $T = t = 3$. $D = 2$. $d = 6$. erit $V : u = \frac{10}{9} : \frac{30}{9} = 2 : 6$ hoc eſt, cæteris paribus vires centripetæ ſunt ut diſtantiæ a centro virium. Sit denique $M = 6$. $m = 3$. $D = 2$, $d = 6$; $T = t = 4$; erit $V : u = \frac{12}{16} : \frac{18}{16} = 12 : 18$. h. e. Si tempora periodica ſunt æqualia, vires centrales ſunt in ratione compoſita maſſarum, & diſtantiarum.

§.

§. CCLXXIV.

Corollarium IV. *Si quadrata temporum periodicorum ponuntur ut cubi distantiarum* (quod quidem de revolutionibus planetarum Keplerum observasse dicemus) *erit vis in centrum virium tendens in ratione reciproca duplicata distantiarum ab eodem centro.* Nam ex hyp. $T^2 = D^3$; & ex Cor. II. $V = \frac{D}{T^2}$; igitur facta substitutione erit $V = \frac{D}{D^3} = \frac{1}{D^2}$.

§. CCLXXV.

Corollarium V. *Si vires centripetæ, per quas diversi circuli describuntur, nempe in diversa a centro distantia, sint reciproce ut quadrata distantiarum ab eodem centro, erit celeritas motus circularis in ratione reciproca subduplicata distantiarum*, sive $C = \frac{1}{\sqrt{D}}$. Nam ex hyp. $V = \frac{1}{D^2}$; est autem universe in circulo $V = \frac{C^2}{D}$; erit igitur hoc casu $\frac{1}{D^2} = \frac{C^2}{D}$; & $\frac{D}{D^2} = C^2$, sive $\frac{1}{D} = C^2$; unde fit $C = \frac{1}{\sqrt{D}}$.

§. CCLXXVI.

Resolvuntur Dubia, & ostenditur usus Theoriæ virium Centralium.

I. *Omne corpus, quod circa centrum quoddam in curva revolvitur, vim duplicem habet, unam, qua ad centrum perpetuo trahitur, alteram, qua a centro conatur iden-*

identidem recedere ſecundum tangentem (§. CCLXIV.) *cum igitur*, inquiunt, *diverſæ curvæ deſcribi poſſint*, *uti circularis*, *elliptica*, *parabolica &c. adſignanda eſt ratio ſufficiens*, *cur in dato caſu hæc potius*, *quam alia curva deſcribatur ob vim proiectilem*, *& centripetam*, *ſeu vim gravitatis*. R. Sine dubio Philoſophi eſt, ſaltem generalem rationem dare, cur hæc potius, quam alia curva deſcribatur ob vim proiectionis, & gravitatis; nam orbitas planetarum circa ſolem dicemus eſſe ellipticas: corpora in ſuperficie terræ proiecta proxime deſcribunt ramos parabolæ: motus lunæ circa terram adparet ad circulum accedere; cum igitur omnes iſti motus curvilinei a vi proiectionis, & gravitatis oriantur, legitime quæritur, cur hæc potius quam alia traiectoria conficiatur a mobili. Dico: ratio generalis, cur hæc potius, quam alia curva percurratur, petenda eſt tum ab angulo, quem directio proiectionis, vel durante motu poſitio tangentis efficit cum recta ad centrum virium ducta, tum & præcipue a certa attemperatione vis proiectilis ſeu tangentialis, & centripetæ, ſive a ratione, quæ inter eas vires intercedit; quemadmodum generatim poſitio, & magnitudo diagonalis, quæ motum compoſitum exprimit, ab angulo, & a ratione virium componentium pendet; idem igitur in motu fit curvilineo, quia quodvis infiniteſimum latus curvæ quædam diagonalis eſt. Ut ea virium attemperatio intelligatur, *primo* ſpectatur, quanta eſſe debeat celeritas proiectionis, vel quanta ſit celeritas motus in quovis arcu infiniteſimo. *Secundo* quanta ſit vis gravitatis, & quomodo ea pro varia a centro virium diſtantia creſcat, vel decreſcat. Ex iis dein facile intelligitur, qualis ea virium componentium attemperatio eſſe debeat; Nam præcipuus effectus virium gravitatis ſive centripetarum eſt, ut mobile a rectilineo motu, ad quem per vim proiectionis, vel inertiæ in quovis arcus puncto nititur, ad arcum datæ curvæ deſcribendum detorqueatur; hinc ſi manente eadem vi centripeta maior ponitur celeritas tangentialis, mobile eodem tempuſculo minus a tangente deflectitur, & orbita magis dilatatur; ſi vero manente vi proiectili maior ponitur vis centripeta, orbita magis incurveſcit; conſequenter niſi certa attemperatio virium compo-

po-

ponentium concipiatur, nunquam eandem describi curvam concipi potest, quæ reipsa describitur.

II. Dicunt: *Vires componentes, nempe vis centripeta, & proiectionis sunt vires dispares, & heterogeneæ, nimirum illa acceleratrix, & sæpe variabilis: hæc uniformis & constans; igitur intelligi non potest, quomodo ratio quædam inter eas vires determinari queat.* R. Ea ratio determinatur hoc modo: Ponitur mobile per vim gravitatis eandem, quam in puncto proiectionis, vel in dato puncto orbitæ habet, decidere versus centrum virium, eaque gravitate constante motum accelerare uniformiter; & quoniam motu libero, & uniformiter accelerato quævis data celeritas acquiri potest (§.LXXXIX) hinc determinatur spatium, per quod, si corpus ea, quam habet, gravitate constante decideret, velocitas proiectionis, sive motus, quo fertur in orbita, acquireretur. Eiusmodi spatium versus centrum virium confectum, a nobis adpellabitur *altitudo respondens* celeritati, qua proiiciendum est corpus, ut datam curvam describat, vel qua fertur in data orbita. Exempli caussa poni potest istiusmodi problema: *Invenire altitudinem, per quam corpus motu libero, & uniformiter accelerato descendendo versus centrum virium per actionem constantem gravitatis, acquireret celeritatem, qua proiectum circulum describeret circa illud centrum.* Sit (F. IV.) centrum C. mobile in S; altitudo quæsita x; tempus per $S\,m = t$; tempus per $x = T$.

1. Quoniam spatia motu uniformiter accelerato, & gravitate constante confecta, sunt ut quadrata temporum, erit

$$S\,m : x = t^2 : T^2.$$

2. Corpus eodem tempore t moveretur per S m, & S *a*, atque eodem tempore T, quo motu uniformiter accelerato conficit spatium x, celeritate finali, & motu æquabili conficeret 2 x; atque hæc celeritas per spatium = 2 x, esset celeritas proiectionis, sive celeritas per arcum S *a*. Cum igitur celeritas per arcum S *a*, & per spatium 2 x sit eadem, erunt hæc spatia, ut tempora, queis percurruntur, sive

X S *a*:

$$S\,a : 2\,x = t : T$$

Unde fit $S\,a^2 : 4\,x^2 = t^2 : T^2$.

3. Si comparetur hæc analogia cum numero primo, fit

$$S\,m : x = S\,a^2 : 4\,x^2.$$

& $$S\,m : 1 = S\,a^2 : 4\,x$$

Consequenter $S\,m = \frac{S\,a^2}{4\,x} = \frac{S\,a^2}{a\,d}$; nam arcus infinitesimus $S\,a$ non differt a chorda respondente, quæ est media proportionalis inter diametrum $a\,d$, & segmentum adiacens $S\,m$.

4. Cum igitur fit $\frac{S\,a^2}{4\,x} = \frac{S\,a^2}{a\,d}$, erit $4\,x = a\,d$; & $x = \frac{a\,d}{4}$ hoc est, ut *corpus acquirat celeritatem proiectionis, qua volveretur in circulo, deberet descendere per quartam diametri partem, sive dimidium radium; & celeritas, qua corpus in circulo volvitur, eadem est, quam lapsu libero per dimidium eius radium acquireret ope eiusdem gravitatis, quam habet in S seu puncto proiectionis.* Quæ præterea ad hunc locum referri possunt, problemata infra exponemus.

III. *Nulla est ratio sufficiens, cur vis centralis sive centripeta in circulo, sit ut quadratum celeritatis directe, & reciproce ut radius; Nam vires, præscindendo a massis, sunt ut ipsæ celeritates, non ut quadrata earundem; nec facile intelligi potest, quid radius ad maiorem, vel minorem vim centripetam conferat.* Hæc quidem non nisi declarandæ rei gratia obiici possunt; reipsa enim datæ a nobis demonstrationi nihil officiunt. Quapropter R. Vires sunt ut ipsæ celeritates per eas vires genitæ; c. ut celeritates productæ per vim aliam, vel ut celeritates motus compositi, n. Nempe vis centripeta est ut quadratum celeritatis, qua mobile abiret per tan-

tangentem, aut qua volvitur motu composito in curva; non est autem hæc vis centripeta ut quadratum celeritatis, quam ipsa gignit. Et quoniam effectus vis centripetæ est, ut mobile a tangente, secundum quam per vim inertiæ perpetuo nititur, detorqueatur ad orbitam, hinc ea in eadem ratione crescere debet, qua crescunt lineolæ, A *a*, B b inter tangentem, & arcum interceptæ; hæ autem lineolæ crescunt ut quadrata tangentium S A, vel S B; cum igitur hæ tangentes exprimant celeritatem proiectionis, vel motus in orbita, necesse est, ut vis centripeta crescat, ut quadratum celeritatis. Dein quo minor est radius, eo minor est circuli curvatura, eoque magis crescunt illæ lineolæ A *a*, & B b, quæ rationem vis centripetæ exprimunt; igitur ex hac ratione intelligi potest, cur ea sit reciproce ut radius, sive distantia a centro virium. Hinc vero etiam alterius expressionis, qua V fit $= \frac{D}{T^2}$, expositio quædam physica derivari potest; cum enim motus in circulo sit æquabilis, ubi celeritas universe est directe ut spatium, sive in motu circulari ut peripheria aut radius, & reciproce ut tempus; erunt quadrata celeritatum, ut quadrata radiorum, seu distantiarum directe, & reciproce ut quadrata temporum; hinc facta substitutione $\frac{D^2}{T^2}$ pro C^2 fit $V = \frac{D}{T^2}$, uti coroll. II. ostendimus. Plures istiusmodi *explicationes physicas*, uti non nulli vocitant, de formulis ope matheseos erutis tum adferemus, cum de planetarum motu erit agendum.

IV. *Passim Philosophi statuunt, motum curvilineum circa centrum oriri ex vi centripeta, & centrifuga; & vim centrifugam etiam experimenta comprobant, dum enim lapis ope fundæ circumagitur, funda tenditur, & manus nisum contrarium sentit. Ergo curvilineus motus per vim centripetam, & tangentialem non satis intelligitur.* R. Non quæritur, quid Philosophi quidam statuant; sed quid convenienter rationi, & experientiæ statuere debeant. Vis centrifuga in corporibus circa

centrum revolutis reipsa & absolute nulla est, sed duntaxat fingitur hypothetice, nimirum si cessante vi centripeta mobile per tangentem abiret, eo ipso magis discederet, & distaret a centro, quam si conservaretur in orbita; uti si cessante vi centripeta S m (F. V.) mobile ex S veniret in A, intervallo A i auffugisset ab orbita; hæc igitur vis centrifuga expressa per A i duntaxat fictitia est, & hypothetica, & æquatur vi centripetæ S m, cum sit oppositum latus in parallelogrammo, cuius diagonalis est arculus infinitesimus dato tempusculo descriptus. Tensio fundæ, & vis contraria, quam manus sentit, oritur a vi tangentiali, sive perpetuo nisu mobilis abeundi per tangentem, a qua proin perpetuo retrahi debet. Sane cum in motu composito quodvis latus exprimens vim quandam æquipolleat binis aliis viribus per reliqua latera expressis (§. LVIII.) hinc & vis tangentialis S A æquipollebit vi S i & S m contraria directione sumtæ seu vi S n, quæ a vi centripeta trahente versus centrum extinguenda est, ut mobile describat latus S i sive arcum curvæ; satis igitur patet, quomodo a vi tangentiali oriatur tensio fundæ, & vis contraria, quam manus sentit; centrum enim rotationis est ipsa manus, quæ continuum nisum exerere debet, ne funda excutiatur; omnis porro ars funditorum in eo sita est, ut laxato opportune funiculo ad observatam metam per tangentem abire sinantur lapides. Hæc directio, & vis tangentialis, quam cessante vi centripeta sequuntur rotata corpora, plurimis observationibus, & experimentis comprobatur. Si ad cotem acuuntur instrumenta mechanica, vel si rota molaris volvitur in aqua, guttæ aquæ per tangentes dispergantur: pariter lutum adhærens rotis linea recta, quæ rotam tangit, eiicitur. Sic & frusta lapidis molaris, si cessat vis cohæsionis, avolant per tangentem; ea autem vis cohæsionis partium rotæ vim centripetam obit. Ratio autem, cur præcise per tangentem abeant corpora rotata, ex generali lege motus intelligitur, vi cuius ea per vim inertiæ semper ad motum uniformem in directum tendunt; etsi autem per vim centripetam a rectilineo motu detorqueantur; tamen, cum vis inertiæ semper maneat, in quovis arcus descripti pun-

puncto nituntur ad eiusmodi motum; cum igitur tangens nihil aliud sit, quam productio finita lateris polygonaris infinite parvi, necesse est, ut in quovis arcus puncto semper per tangentem conentur abire.

V. *In machina virium centralium globi rotati moventur per filum ferreum, quod radios circuli descripti, non tangentes repræsentat; igitur inferunt corpora in gyrum acta veram vim centrifugam, non tangentialem habent.* R. Globi per filum ferreum transmissi, cum a filo impediantur, moveri secundum tangentem hoc casu non possunt; rupto autem filo ferreo, uti fit non raro, eos omnino per tangentes eiici observamus. Liquores in tubis vitreis rotati etiam ad latera, si possint, diffluunt; quod vero maiore copia abeant secundum radios, ratio est, quia primo diffluere ad latera non possunt ob ipsa latera vitri, tum quia a partibus insequentibus recta premuntur.

VI. *Si capsæ argilla molliore intus vestitæ inseritur globus, qui dein una cum capsa in gyrum agitur, globus vestigium argillæ imprimet non directione tangentis, sed radii; ergo, inferunt, corpora rotata non semper per tangentem abeunt.* R. Ratio experimenti est. Dum globus cum capsa rotatur, fit, ut eadem celeritate, qua globus versus latera secundum tangentem nititur, ipsum capsæ latus cum argilla effugiat; hinc vestigium ei imprimi nullum potest. At si motus machinæ repente sistitur, globus etiam lateri capsæ imprimet cavitatem; quod indicio est, eundem iam ante habuisse nisum versus latus, sive secundum tangentem, sed sine effectu; quia capsa æquali celeritate cedendo actionem globi quodammodo evitabat.

VII. *Si in aqua festucæ aut paleæ innatent, eæ rotato vase versus centrum compelluntur; igitur non adparet, quomodo vim abeundi per tangentem habeant.* R. Rotato vase aqua in vorticem acta, cum sit densior festucis, & paleis, & proinde maiore vi polleat discedendi a centro, festucas leviores contraria directione versus centrum compellit; uti enim liquod fluidum magis deorsum premit, quam ligna vel paleæ; hæc corpora leviora sursum truduntur; ita secundum leges pres-

 sio-

sionis, si fluidum maiore vi recedat a centro, corpora leviora versus centrum agi necesse est; hinc & flamma rotata centrum respicit, cum ignis sit levior aere. Observa: Si motus rotationis sistitur, & vas aqua plenum quiescit, fluidum tamen ob ipsam partium separabilitatem gyrum suum per vim conceptam continuat; sic postquam animalia maiore celeritate in orbem acta sunt, cessante eo motu totius corporis aliquamdiu circumagi sibi videntur, propterea quod spiritus animales priorem rotationis motum quodam tempore conservent. Cæterum ut de usu quoque huius theoriæ differamus, Ioannes Keplerus Wilæ natus in ducatu Wirtenbergico anno 1571 præter alia præclare inventa primus censetur observasse eam naturæ legem, qua corpora rotata circa centrum conantur ab eodem recedere, ita, ut, si in aqua festucæ aut paleæ innatent, rotato vase aqua in vorticem acta, festucis densior, proin maiore vi recedens, festucas versus centrum compellat; id quod Keplerus locis pluribus, & in Epitome astronomiæ exposuit, *quamquam adhuc subdubitans* (ut ait Leibnitius Act. Erud. Ann. 1689) *& suas ipse opes ignorans, nec satis conscius quanta inde sequerentur tum in Physica, tum speciatim in Astronomia.* Addit Leibnitius, his deinde egregie usum esse Cartesium, quamquam more suo auctorem dissimularit. At enim merito dubites, Cartesium Keplerianis inventis usum fuisse, vel abusum dici oporteat. Nam ex sola rotatione fundæ, quam vi centripeta, & centrifuga agi dixerat, totum orbis systema concepit, & vortices construxit, & elementa corporum, eorumque genesin ita descripsit, ac si orbi fabricando interfuisset. Felicius observationibus Kepleri usus est Newtonus, qui theoriam inde condidit admirabilem qua intricatissimos planetarum motus, & vires, quibus ea corpora aguntur, explicavit summo cum naturæ phænomenis consensu. Postquam enim animadversum erat, corpora circa centrum quoddam revoluta perpetuo ad recessum ab eodem niti secundum rectas tangentes, duo hæc necessario concludi debebant: *primo* ea, quamdiu in orbita conservantur, perpetuo a directionibus tangentium retrahi, & versus centrum trahi debere; secus enim reipsa recederent, non aliter ac

par-

partes molaris lapidis cessante vi cohaesionis per lineas rectas excutiuntur. *Secundo* eiusmodi corpora agi motu composito ex duabus saltem viribus, una qua ad centrum trahuntur, vel quomodocunque tendunt, altera qua secundum rectas tangentes uniformiter pergere conantur; prior vis centripeta, altera tangentialis passim nunc dicitur, olim centrifuga adpellata a quibusdam. Virium igitur istarum, quas centrales vocant, theoria maximi momenti, atque usus est; omnis enim de gravitate corporum adcuratior perquisitio, & tota astronomia physica inde pendet; ostendemus enim cometas, & planetas non aliis viribus, quam centripeta, & tangentiali orbitas suas circa solem describere, eosque ni vi gravitatis in solem tenderent, vel attraherentur a sole, quovis momento per lineas rectas esse discessuros. Ut haec virium centralium expositio; quae tanti momenti est, recte percipiatur, adiungemus exercitationis caussa quaedam problemata ad hunc locum pertinentia.

VIII. Problema I. *Invenire celeritatem gravi terrestri imprimendam, ut horizontaliter proiectum circulum describat circa terram, ac pro eodem casu invenire tempus periodicum.* Nimirum ei corpori imprimenda esset celeritas, quam acquireret vi gravitatis, quae est prope superficiem terrae, lapsu libero, & uniformiter accelerato per dimidium terrae radium. Est autem gravitas terrestris ea, ut intra $1''$ conficiantur 181. dig. terrae diameter $= 39231564$ ped. Paris. $= 470778768$ dig. sit spatium $181'' = g$, & dimidius radius $= s$; erit diameter $= 4$ s. & $s = 117694692''$ Celeritas finalis lapsu libero & uniformiter accelerato acquisita aestimatur ex duplo spatio motu aequabili conficiendo intra idem tempus, quo lapsus durabat; erit ergo celeritas finalis acquisita primo minuto secundo $= 2$ g. Porro quoniam spatia motu accelerato confecta sunt ut quadrata harum celeritatum finalium, erit $g : s = 4g^2 : 4gs$; ultimus terminus exprimit quadratum celeritatis finalis acquisitae lapsu libero per dimidium terrae radium; erit ergo ipsa celeritas $= 2\sqrt{gs}$; atque haec ipsa est celeritas, qua corpus horizontaliter proiectum circulum describeret circa ter-

ram. Est autem $2\sqrt{gs}$ neglectis fractionibus = 291908; tanta igitur requiritur celeritas proiectionis, ut per eam corpus proiectum intra minutum secundum percurrat digitos 291908, qui proxime efficiunt pedes 24325. Hi rursus conversi in leucas (continet autem leuca 2000 hexapedas, seu 12000 pedes) praebent leucas $2\frac{1}{37}$ quam proxime intra 1″ percurrendas. Tanta igitur celeritate si grave terrestre proiiciatur sub angulo recto, sepositis impedimentis motum perturbantibus, circa terram circulum describeret sive satelles, aut luna terrae fieret; sed vi quidem humana tanta celeritas corpori imprimi haud potest. Ut iam tempus revolutionis eruatur, animadverte, celeritatem, qua mobile peripheriam sui circuli describeret, esse eandem, quam lapsu libero, & uniformiter accelerato per dimidium radium acquireret; atque hoc eodem tempore, quo hanc celeritatem finalem acquirit, per eam motu aequabili percurreret duplum spatium, sive radium circuli; hinc cum celeritas per radium, & circuli peripheriam eadem sit, erunt tempora, queis radius, & peripheria celeritate finali percurrerentur, uti ipsa spatia percurrenda; nempe ut radius ad peripheriam ($\frac{113}{2}$: 355) ita tempus motus aequabilis per radium vel tempus motus accelerati per dimidium radium ad tempus integrae revolutionis in circulo. His positis quaeratur tempus motus accelerati per dimidium radium, quod ad tempus per g erit in ratione subduplicata spatiorum, sive $=\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{g}}$; nam $\sqrt{g} : \sqrt{s} = 1 : \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{g}}$. Deinde fiat: ut radius $\frac{113}{2}$ ad peripheriam 355; ita tempus descensus per dimidium radium $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{g}}$ ad tempus integrae revolutionis in circulo $=\frac{355}{113}\times 2\times\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{g}}=\frac{355}{113}\sqrt{\frac{4s}{g}}=5068''$ proxime; igitur tempus revolutionis adaequat proxime 1 hor. 24′. 28″.

28''. Ex his præterea colligi poteſt *primo* quoniam motus in circulo eſt æquabilis, erit tempus revolutionis per quadrantem quadruplo minus tempore totius revolutionis, adeoque *erit tempus deſcenſus per dimidium radium ad tempus, quo deſcribitur quadrans, uti radius ad quadrantem. Secundo ſpatium, per quod corpus vi centripeta conſtante decideret, eſt ut quadratum arcus eodem tempore deſcripti diviſum per diametrum.* Sit enim (F. VI. T. V.) A Q H peripheriæ quadrans; $AG = \frac{1}{2} AC$. Ponatur arcus A Q deſcribi eodem tempore, quo fit deſcenſus liber per A M; erit

tempus per A M : tempus per $AG = \sqrt{AM} : \sqrt{AG}$.
tempus per AG : tempus per $AH = 2\,AG : AH$ (cor. præc.)
tempus per A H : tempus per $AQ = AH : AQ$

itaque eſt tempus per AM : tempus per $AQ = 2\sqrt{AM.AG} : AQ$; cumque hæc tempora ponantur æqualia, erit $2\sqrt{AM.AG} = AQ$; & $4\,AG.AM = AQ^2 = AM.2\,AC$ conſequenter $AM = \frac{AQ^2}{2\,AC}$.

IX. Problema II. *Poſita eadem gravitate terreſtri invenire primo tempus periodicum, dein celeritatem proiectionis eruere.* Dicatur diameter telluris a; ſpatium intra 1'' gravitate terreſtri percurſum $= 181'' = g$. Tempus periodic[um] x; ratio peripheriæ ad diametrum ſit $= 355 : 113$; erit igitur peripheria a corpore deſcribenda $= \frac{355\,a}{113}$.

1. Quoniam motus in circulo eſt æquabilis, erunt tempora uti arcus decurſi, adeoque (F. VI. T. V.) uti tota peripheria ad arcum A Q; ita tempus integræ revolutionis x ad tempus, quo decurritur arcus A Q; ſeu $\frac{355\,a}{113} : AQ = x : \frac{x \times AQ \times 113}{355\,a}$; quartus terminus exhibet tempus per arcum A Q.

2. Quæratur ſpatium, quod gravitate terreſtri ac motu libero conficitur eo tempore, quo percurritur ar-

cus A Q; & quoniam in motu uniformiter accelerato ſpatia ſunt ut quadrata temporum, erit

$$1 : \frac{x^2 \times AQ^2 \times (113)^2}{(355)^2 a^2} = g : \frac{x^2 \times AQ^2 \times (113)^2 \times g}{(355)^2 a^2}.$$

3. Hoc ſpatium per confectarium ſecundum numeri præc. æquatur quadrato arcus eodem tempore deſcripti diviſo per diametrum; itaque erit

$$\frac{x^2 \times AQ^2 \times (113)^2 \times g}{(355)^2 a^2} = \frac{AQ^2}{a}.$$

Hinc autem facile eruitur $x^2 = \frac{(355)^2 \times a}{(113)^2 g}$, &

$x = \frac{355}{133} \sqrt{\frac{a}{g}}$. Denotat autem a diametrum ſeu 4 s; Idem igitur ut ſupra invenitur tempus periodicum $= 5068''$. Ut celeritas proiectionis eruatur, quæratur tempus deſcenſus per dimidium radium; quod quidem ex tempore periodico eruitur; ſit illud $= T$; erit ex num. præc. $\frac{113}{2} : 355 = T : 5068$. Subducto calculo reperitur $T = 806, 5$. Porro ex formula indicata in Schol. §. XCVI. Probl. IV. celeritas finalis univerſe eſt $= 2\, g\, T = 2 \times 181 \times 806, 5 = 291953$ proxime, uti probl. præc. reperimus. Numerus inventus in digitis indicat ſpatium a mobili intra $1''$ conficiendum vi proiectionis.

X. Problema III. *Poſito motu vertiginis terræ intra 24 horas* ($= 86400''$) *invenire vim centrifugam corporis in ſuperficie terræ poſiti relate ad gravitatem terreſtrem.* R. Vi centripetæ corporum revolutorum æquatur vis centrifuga, eademque utriusque expreſſio eſt, uti numero IV huius §. oſtendi. Si corpus terreſtre circa terram revolvitur intra $5068''$, ea vis centripeta & centrifuga æquat gravitatem terreſtrem; quæritur, quanta ſit hæc vis, ſi in eadem a centro terræ diſtantia, quæ radium telluris æquat, revolvitur intra 24 horas $= 86400''$. Dicatur hoc tempus T, illud ſuperius ſit $= t$.

$=$ t. Vis centrifuga sub revolutione T fit $= 1$. Ex Cor. II. §. CCLXXII. vires centripetæ sunt directe ut distantiæ, & reciproce ut quadrata temporum periodicorum; ex hypothesi distantiæ sunt eædem $= 1$. Erit igitur $t^2 : T^2 = 1 : \frac{T^2}{t^2}$ seu $(5068)^2 : (86400)^2 = 1 : 287$ proxime; hoc est, si corpus terrestre circa terram revolvitur intra 24 hor. vis centrifuga se habet ad gravitatem terrestrem sive ad vim sub revolutione t, uti $1 : 287$; hæc ratio non multum discrepat ab ea, qua passim statuunt, vim centrifugam corporis terrestris sub æquatore ad vim gravitatis terrestris esse, ut $1 : 289$. Ut inveniatur, quanto spatio corpus per eiusmodi vim centrifugam recederet a terra intra minutum secundum, in memoriam revocanda est formula de spatiis per diversas vires acceleratrices confectis, quæ sunt ut ipsæ vires, si tempus ponitur constans (§. XCV.) hinc cum spatium gravitate terrestri percursum intra min. secundum sit $= 281''$, erit $287 : 1 = 181 : \frac{181}{287} = 0,630$ hoc est, mobile per eam vim centrifugam intra $1''$ non nisi per 6 partes decimas & tres centesimas unius digiti recederet. Passim id spatium statuunt $= \frac{1}{19}$ ped. Nam $287 : 1 = 15 : \frac{15}{287} = \frac{1}{19}$.

Paulo minus reperitur hoc spatium ex consectario secundo n. VIII. ubi spatium per vim centralem confectum ostenditur æquale quadrato arcus eodem tempore descripti diviso per diametrum. Igitur quæratur arcus æquatoris terrestris, qui intra $1''$ per meridianum transit, hoc modo: si æquatori tribuuntur 360 gradus, uni gradui 15 milliaria germanica, uni milliari 20000 pedes; continebit tota peripheria 108000000 ped. qui transeunt per meridianum intra 24 horas seu $86400''$. Igitur intra $1''$ transibit arcus 1250 ped. quadrato huius arcus per diametrum diviso æquale est spatium vi centripeta, cui æquatur centrifuga, conficiendum, idque erit $= \frac{1562500}{39231564} = \frac{1}{25}$ ped. Ratio discriminis, quod inter hoc spatium, ac superius inventum intercedit, oritur a diversis numeris assumtis, quod calculi facilioris gratia factum est. Nam assumta ut supra diametro terrestri $= 39231564$ ped. Non possunt uni gradui 15 milliaria germanica, & uni milliari 20000 pedes adcurate tribui.

CAPUT V.

De Motu Corporum Proiectorum, & Principiis Balisticæ.

Qui imperitia rerum mathematicarum, aut vitio methodi, quam in explicanda Philosophia arripuerunt, adplicationi, & usui elementorum Matheseos infensi sunt, ex hoc loco argumentum depromi posse eiusdem adplicationis reprehendendæ arbitrantur; propterea quod experientiæ & observationes, quas de proiectione corporum, & re Balistica habemus, cum theoria ope Matheseos stabilita parum consentiant; quasi vero id theoriæ aut Matheseos vitio contingeret. Si perfunctorie, & vage philosophandum non est, neque eventus rerum incertis casibus, & fortunæ ludibrio sunt committendi, profecto nec in rerum usu seu praxi ut aiunt, genuina theoria, nec in theoria condenda elementis Matheseos carere possumus. Quæ ultra theoriam desiderantur, ex singularibus adiunctis petenda, ipsoque usu cognoscenda sunt.

§. CCLXXVII.

Definitio. Si conus rectus A B C (F.VII. T.V.) secatur directione S p ad latus coni A B parallela, sectio m M S M m est *Parabola.* Recta S p, seu communis plani m S m cum triangulo A B C sibi verticali, & per axem transeunte intersectio, est *axis*; rectæ M P, m p ad axem normales sunt *ordinatæ* axeos, rectæ S P, S p *abscissæ.* Proprietates parabolæ ex Elem. sunt 1. Quadrata ordinatarum, sunt ut abscissæ, ut sit $PM^2 : pm^2 = SP : Sp$; & quia alternando fit $PM^2 : SP = pm^2 : Sp$, ac proin $\frac{PM^2}{SP} = \frac{pm^2}{Sp}$; hinc tertia proportionalis ad abscissam, & suam ordinatam est ubique eadem, ac constans. Hæc tertia proportionalis adpellatur *Parameter*; hinc quadratum ordinatæ y æquat rectangulum ex abscissa x & parametro p; ut sit $y^2 = px$. Punctum axeos in quo ordinata æqualis est semiparametro, adpellatur *focus*; ut sit $y = \frac{1}{2}p$; cumque universe sit $y^2 = px$, erit in foco $\frac{1}{4}p^2 = px$; & $\frac{1}{4}p = x$ h. e. Abscissa inter verticem

&

& focum intercepta, ſive diſtantia foci a vertice æqualis eſt quartæ parti parametri axeos. Eſt illa quoque memorabilis parabolæ proprietas, vi cuius radii ex foco in ſuperficiem parabolicam incidentes, inter ſe paralleli egrediuntur, & qui paralleli cum axe incidunt in ſuperficiem parabolicam, omnes reflectuntur in focum.

2. Si in parabola ducuntur plures rectæ M M, m m, N N &c. (F. VIII.) inter ſe & cum tangente aliqua A T parallelæ, eæque omnes a recta quadam A R biſſecentur, hæc recta A R illarum *diameter eſt*: tertia proportionalis ad abſciſſam diametri, & reſpondentem ordinatam, eſt *parameter eius diametri*: *focus* iterum eſt punctum diametri, in quo ordinata æqualis eſt ſemiparametro.

3. Quoniam parameter ſemper conſtans eſt, hinc creſcente in infinitum abſciſſa etiam creſcent in infinitum ordinatæ, proin uterque parabolæ ramus, in infinitum abit, neque ea eſt curva in ſe rediens; ac quævis recta, quæ diameter non eſt, vel tangens, quæ in uno puncto ſecat hanc curvam, eam ſecat in alio præterea puncto. Tangens vero ſemper parallela eſt ordinatim adplicatis ad axem, vel diametrum, cuius tangens eſt; ac quodvis punctum, in quo ſi adplicetur ordinata, huius quadratum eſt ut abſciſſa, vel æqualis rectangulo ex abſciſſa in parametrum, cenſetur eſſe in parabola.

§. CCLXXVIII.

Propoſitio I. *Si quod corpus ſollicitatur vi acceleratrice conſtante, & ſecundum directiones parallelas agente, idque proiiciatur quavis directione extra directionem vis acceleratricis ſita deſcribet motu ſuo curvam parabolicam.* Dem. Fiat proiectio per lineam A T (F. VIII. IX. X.) ut motu æquabili intra æqualia tempora æqualia ſpatia A B, B C, C D &c. deſcribantur, quæ ſpatia proinde creſcent, uti tempora, nempe 1, 2, 3 &c. ſeu uti A B, A C, A D, A E &c. aut uti rectæ æquales prioribus G M, H N, I O. Ob vim autem acceleratricem conſtantem ſpatia per eandem confecta, erunt ut quadrata temporum ſeu ut 1. 4. 9. &c. hoc eſt, uti AB^2, AC^2 vel ut GM^2, HN^2, IO^2 &c. Si igitur ſpa-

ſpatia vi proiectili confecta exprimuntur per ordinatas GM, HN, IO &c. ſpatia vero vi acceleratrice percurſa per abſciſſas rectæ AR, nempe per AG, AH, AI &c. mobile motu compoſito percurret curvam, cuius abſciſſæ ſunt ut quadrata ordinatarum; eiusmodi vero curva eſt parabolica: igitur mobile in data hypotheſi percurret curvam parabolicam.

§. CCLXXIX.

Corollarium. Quia linea, cuius abſciſſæ ſunt ut quadrata ordinatarum, diameter parabolæ eſt; hinc recta AR, nempe linea directionis initialis, ſecundum quam agit vis acceleratrix, eſt diameter parabolæ a mobili deſcriptæ. Si igitur *angulus, quem directio proiectionis cum directione vis acceleratricis efficit, rectus eſt.* (F. IX.) ordinatæ ad diametrum AR ſub angulo recto adplicantur, eaque diameter eſt *axis* curvæ, punctum A, in quo axis curvæ occurrit, eiusdem *vertex*; conſequenter corpus terreſtre horizontaliter proiectum, id eſt, ſub angulo recto, parabolam a vertice deſcribere incipit, eſtque axis curvæ directio vis acceleratricis. *Si angulus virium componentium eſt obtuſus* (F. VIII.) id eſt, ſiquod corpus oblique ſurſum proiicitur, intra eum angulum ducatur normalis AZ, quæ eſt linea horizontalis reſpectu directionis gravium. Ex proprietate parabolæ omnis recta occurrens curvæ in uno puncto, ſi non ſit tangens, vel diameter ei puncto reſpondens, tranſibit per aliud quoque illius punctum nempe V. Secetur AV bifariam in F, fiatque perpendicularis FS, quæ occurret curvæ in S, eritque FS axis parabolæ, S vertex, AR diameter, in qua ſumuntur abſciſſæ. Igitur grave terreſtre oblique ſurſum proiectum parabolam incipit deſcribere infra verticem, per illum tamen tranſit, ita, ut circa axem utrinque ramum quemdam deſcribat. Linea horizontalis AV, quæ ſubtendit ſemitam oblique ſurſum proiectorum, vocatur *amplitudo ſemitæ*, quæ ad diametrum AR ſive directionem gravium eſt perpendicularis. Angulus TAZ, quem linea proiectionis cum linea horizontali efficit, nuncupatur *angulus elevationis.* Perpendicularis FS inter verticem, & punctum F rectæ

AV

A V medium intercepta, eſt *maxima altitudo* corporis proiecti, ſive *altitudo iactus*, quæ determinatur per punctum S, in quo proiectile maxime diſtat ab horizontali A V. Si denique *angulus virium componentium R A T eſt acutus* (F.X.) id eſt, ſi corpus oblique deorſum proiicitur, totus arcus deſcriptus cadet infra hunc angulum. Perpendicularis Z A per A ducta ſecaret axem; proin vertex curvæ eſt extra angulum & ramum deſcriptum. Quapropter corpus oblique deorſum proiectum parabolam incipit deſcribere infra verticem, nec per eum tranſit. In omni autem parabola deſcripta adplicatæ ſeu ordinatæ ſunt parallelæ ad lineam proiectionis A T ductam per punctum A, in quo diameter A R ſecat parabolam; & quoniam omnis linea ordinatis parallela, quæ in eodem, quo diameter, puncto parabolæ occurrit, eſt tangens eiusdem, perſpicuum eſt, lineam proiectionis eſſe tangentem curvæ in puncto, ubi motus incipit.

Plura ſunt, quæ in hoc motu præcipue ſpectari debent; 1. directio proiectionis, ſive angulus, quem linea proiectionis cum horizontali efficit. 2. amplitudo ſemitæ. 3. altitudo iactus. 4. celeritas proiectionis. Nam manente eadem directione, & vi acceleratrice, ſi celeritas proiectionis alia, atque alia eſt, alia quoque parabola deſcribetur; quo enim maior eſt vis proiectionis, eo maiores ſunt ordinatæ; conſequenter ſingula curvæ puncta conſtante quidem lege ſed tamen maiore intervallo utrinque a diametro, ubi ſumuntur abſciſſæ, diſcedent, ac ſemita magis dilatabitur. Ut igitur traiectoria proiectilis determinetur, præter angulum etiam celeritas proiectionis determinanda eſt. Quemadmodum vero data parametro & abſciſſis, itemque angulo, ſub quo ordinatæ ad diametrum ſunt adplicandæ, deſcribitur parabola; ita celeritas proiectionis cum parametro, a quo curva pendet, nexum quendam habet, qui modo inveſtigandus eſt. Ac ſupra iam adnotavimus, celeritatem proiectionis, quæ ad datam curvam deſcribendam neceſſaria eſt, determinari per altitudinem, per quam, ſi mobile vi ſuæ gravitatis libere deſcenderet, eam celeritatem acquireret, qua proiectum datam curvam deſcriberet.

§. CCLXXX.

§. CCLXXX.

Propositio II. *Parameter diametri e puncto proiectionis ductae aequalis est quadruplae altitudini, per quam cadendo grave celeritatem proiectionis acquireret*, sive si parameter eius diametri dicatur p; altitudo quaesita x; dico esse $p = 4x$, & proin $\frac{1}{4}p = x$, hoc est, *altitudo respondens celeritati proiectionis aequatur quartae parti parametri.* Dem. In fine altitudinis x acquiritur ea celeritas, qua motu aequabili eodemque tempore possit percurri dupla altitudo seu $2x$; erit igitur ordinata y respondens altitudini $= 2x$. In parabola universe est $y^2 = px$; proinde hoc casu erit $4x^2 = px$. unde $x = \frac{1}{4}p$.

§. CCLXXXI.

Corollarium. Sint altitudines respondentes celeritati proiectionis A, & a; celeritates acquisitae C, & c; parametri parabolarum, quae per eas describuntur P, & p; erit $A : a = \frac{1}{4}P : \frac{1}{4}p = P : p$. Item ex legibus motus uniformiter accelerati, $A : a = C^2 : c^2$; consequenter $P : p = C^2 : c^2$. Parametri sunt in ratione duplicata celeritatum, queis corpora proiiciuntur; & si eadem est proiectionis velocitas, quaecunque sit directio, eadem est parameter. Quoniam ex elem. distantia verticis a foco axeos aequalis est quartae parti parametri, seu lateris recti axeos; hinc si abscissae sumuntur in axe parabolae descriptae, ea erit velocitas proiectionis, quam grave descendendo in focum axeos acquireret. Data igitur celeritate proiectionis invenitur altitudo ei respondens, proinde eius quadruplum, sive parameter; quomodo autem ea celeritas proiectionis, quam globi tormentis bellicis excussi habent, innotescat, infra intelligetur.

§. CCLXXXII.

Propositio III. *Amplitudo iactus se habet ad semiparametrum, ut sinus dupli anguli elevationis ad sinum totum.* Dem. Sit (F. XI. T. V.) A R diameter curvae descri-

describendæ e puncto proiectionis A, seu directio gravium; ea producatur in G, donec A G habeat rationem parametri, quæ ex data celeritate proiectionis determinatur; recta A G secta bifariam, ex puncto eius medio C intervallo A C describatur semicirculus occurrens lineæ proiectionis A T in F; atque ex hoc puncto F agatur normalis F E; dico in primis, eam exprimere amplitudinem semitæ. Quod ut demonstretur, ducta ad A R normali S A, & ex F normali F Q, fiat A B = F Q, & agatur recta B Q. erit A Q = E F; A F = B Q, E A = F Q. Ex proprietate circuli est AG: AF = AF: EA
sive - - - AG: BQ = BQ: FQ.
Quare cum A G sit parameter, A B abscissa, B Q parallela lineæ proiectionis seu tangenti in puncto A, & respondens abscissæ A B, erit punctum Q in parabola a mobili descripta. Igitur recta A Q in binis punctis A & Q occurrit parabolæ, eademque ad A R directionem gravium est normalis, ac proin horizontalis; cum igitur eadem recta in binis punctis secet parabolam, ea exprimet amplitudinem iactus; sed A Q = F E; hæc igitur perinde ut A Q amplitudinem iactus exhibet. Porro

Sit semiparameter = $\frac{1}{2}$ p; amplitudo iactus B, angulus elevationis F A S; ductis ex C centro recta C F, tum recta G F, erit angulus elevationis F A S = ang. A G F, cum utriusque mensura sit dimidius arcus A F. Ob radios C G, C F æquales triangulum G C F est isoscelicum, & angulus externus E C F = 2 C G F æquatur duplo angulo elevationis. Quamobrem si in triangulo E C F fiat C F = C G = $\frac{1}{2}$ p sinus totus, erit recta E F sinus dupli anguli elevationis. Igitur C F sinus totus = 1. est ad E F sinum dupli anguli elevationis, uti semiparameter ad amplitudinem iactus, sive 1: $\frac{1}{2}$ p = sin. 2 ang. elev: B.

§. CCLXXXIII.

Corollarium I. Si prima ratio ponitur constans, id est, si eadem est proiectionis velocitas, & consequenter eadem parameter, & semiparameter, amplitu-

dines iactuum erunt uti finus duplorum angulorum elevationis.

§. CCLXXXIV.

Corollarium II. Manente eadem celeritate proiectionis fub angulo proiectionis femirecto five 45° eft maxima amplitudo femitæ, & æqualis femiparametro. Nam ex cor. præc. fi eadem manet velocitas proiectionis, amplitudines funt ut finus duplorum angulorum elevationis. Si iam angulus elevationis ponitur $= 45^{\circ}$, erit duplus $= 90^{\circ}$, qui eft finus totus omnium finuum maximus, $= 1$. Unde fit $1 : 1 = \frac{1}{2}$ p: B h. e. inter amplitudinem iactus & femiparametrum obtinet ratio æqualitatis. Nempe ad maiorem amplitudinem confert tum maior altitudo; quo magis enim oblique afcendit, eo magis difcedit a puncto proiectionis: tum maior celeritas fecundum directionem horizontalem; iufta igitur & altitudinis, & directionis horizontalis attemperatio habetur fub angulo femirecto; fi enim is minor eft, directio quidem horizontalis crefcit, fed minor fit altitudo; fi vero maior eft angulus elevationis, magis crefcit altitudo, altiusque afcendit mobile, fed tota orbita ob vim minorem horizontalem magis contrahitur.

§. CCLXXXV.

Corollarium III. Sub angulis a femirecto æque differentibus e. g. 40° & 50°, vel 30° & 60°, vel 20° & 70°, fi eadem eft proiectionis celeritas, amplitudo femitæ pariter manet eadem. Sit enim angulus femirectus $= \frac{r}{2}$; exceffus, vel defectus ab eodem $= d$; erunt ex hyp. anguli elevationis $= \frac{r}{2} + d$, & $\frac{r}{2} - d$. Horum dupli $= \frac{2r}{2} + 2d$, & $\frac{2r}{2} - 2d$; fumma igitur $= 2r$ facit duos rectos. At vero ii anguli, quorum unus tantundem excedit rectum, quantum alter ab

ab eo deficit, sunt deinceps positi: angulorum autem deinceps positorum iidem sunt sinus; cum igitur posita celeritate proiectionis constante amplitudines iactuum sint ut sinus duplorum angulorum elevationis, patet propositum.

§. CCLXXXVI.

Corollarium IV. *Maxima altitudo iactus est ad octavam partem parametri, ut sinus versus dupli anguli elevationis ad sinum totum.* Inventa enim F E, quae amplitudinem semitae exprimit, haud aegre reperitur ratio maximae altitudinis iactus. Concipiatur enim vis proiectionis A F resolvi in binas vires, E F horizontalem, & A E verticalem. Si utraque a puncto proiectionis A maneret constans, eodem tempore conficeretur E A, & E F, quo recta A F. Cum ergo vis A E uniformiter retardetur, duplo tempore opus est ad conficiendam directionem A E, sive mobile eo tempore, quo vi perpendiculari ascenderet per A E, vi horizontali, quae manet constans, percurret 2 E F; cumque tempus descensus ex altitudine, ad quam proiectile eluctatur, sit aequale tempori ascensus; idcirco tempore totius iactus, quo mobile ad maximam altitudinem ascendit, & ex ea iterum descendit, percurrentur 4 E F; erit ergo maxima altitudo ad amplitudinem iactus uti A E : 4 E F, sive quia amplitudo exprimitur per E F, erit altitudo iactus ad eiusdem amplitudinem ut $\frac{1}{4}$ A E : E F, consequenter A E exprimit quadruplam altitudinem iactus. Si igitur in triangulo C E F est C F sinus totus $= 1$, E F sinus dupli anguli elevationis, erit istius sinus versus A E, quae exprimit quadruplum altitudinis iactus, quam voco A. Est igitur A E : C F ($= 4$ A : $\frac{1}{2}$ p) $=$ sin. vers. 2 ang. elev: 1. & proin A : $\frac{1}{8}$ p $=$ sin. vers. 2 ang. elev: 1. Deduces alternando A : sin. vers. 2 ang. elev. $= \frac{1}{8}$ p : 1. Si posterior ratio ponitur constans, id est, si eadem est proiectionis celeritas, consequenter & parameter, maximae altitudines iactuum sunt ut sinus versi duplorum angulorum elevationis.

§. CCLXXXVII.

Animadversiones in Balisticam.

I. Cylinder tormenti bellici, ex quo globi ferrei, plumbei, imo & lapidei vi pulveris pyrii eiiciuntur, in tres partes vulgo distinguitnr. Infima (Bodenstuck) ea est, quæ pulverem pyrium cum globo & lumine accensorio continet. Media (Zapfenstuck) ea est, in qua sunt cylindri laterales solidi, quibus tormentum incumbit fulcro, & delphini, seu ansæ quibus elevatur. Anterior (Mundstuck) ubi est orificium, seu os cylindri. Huius orificii, uti & globi excutiendi diameter *calibra* nuncupatur.

II. Pulvis pyrius, unde celeritas Proiectionis pendet, est mixtum ex nitro, sulphure, & carbonibus. eius pondus, quando tormenta maiora onerantur, plerumque est subduplum ponderis globi, aut etiam subdupli dimidium, si pulvis bombardarius adhibetur: si vero propugnacula munimentorum sunt diruenda, pondus globi est ad pondus pulveris ut $3:2$, vel etiam hoc illi æquale. Regulam calibræ in circino proportionis exhibet *linea solidorum.*

III. Parameter quidem ex quavis observata amplitudine, & noto angulo elevationis, sub quo iactus est factus, potest colligi. His datis tres termini proportionis (§. CCLXXXII.) noti sunt, consequenter quartus, sive semiparameter potest inveniri. Plerumque tamen ex amplitudine maxima (Cor. II. §. CCLXXXIV.) immediate determinatur. Sed quoniam evenire potest, ut commodum spatium pro determinanda maxima amplitudine non suppetat; hinc iactus probatorius fit sub angulo 15°. quo casu amplitudo respondens æquat dimidium maximæ; est enim amplitudo maxima ad hanc uti $2 \times 45 : 2 \times 15 = 90^\circ : 30$ id est ut radius ad eius dimidium; nam sinus anguli 30° æquatur dimidio sinui toti. Hinc quia amplitudines iactuum posita eadem celeritate proiectionis seu vi pulveris pyrii & pondere globi sunt uti sinus dupli anguli elevationis (§.CCLXXXIII.) necesse est, ut amplitudo iactus sub angulo 15° æquet quar-

quartam partem parametri, uti ea sub angulo 45° æquat dimidiam (§. CCLXXXIV.)

IV. Etsi anguli elevationis a semirecto æque distantes eandem præbeant amplitudinem iactus, non tamen in omni casu perinde est, quisnam ex iis seligatur. Nam si ædificium diruendum est, præstat maiorem adhibere angulum, ut ob maiorem lapsus altitudinem maior a proiectili acquiratur celeritas, & vis: si autem cito res agenda est, minor adhibetur angulus; quia eiusmodi iactus ob minorem altitudinem breviore quoque tempore peragitur.

V. Plura sunt, eaque non exigui momenti, quæ theoriam, cuius plura capita exposuimus, perturbent. 1° Quod actiones gravitatis, cum versus centrum telluris convergant, inter se parallelæ haud sint, uti theoria poscit. At enim relate ad radium terræ eæ perparum a parallelismo discedunt, etsi amplitudo iactus ponatur = 5818 ped. 2. Gravitas variatur reciproce ut quadratum distantiæ a centro telluris; sed hæc quoque perturbatio non nisi in rigore mathematico spectari potest. 3. Resistentia aeris tum motum proiectionis tum verticalem multo minorem reddit, quam in vacuo haberetur. At enim distinguenda est resistentia *absoluta* aeris, quæ habetur, si motus per aerem factus conferatur cum motu in vacuo: & resistentia *respectiva*, quæ intelligitur, si motus in aere certa vi proiectili factus comparetur cum motu rursus in aere, eademque vi proiectili sed sub alio angulo elevationis peracto. Negari nequit, resistentiam absolutam esse quam maxime sensibilem, ut cum Daniel. Bernoullio T. II. Acad. Petrop. facile admitti queat, globum tormentarium, qui in libero aere ad 7819 ped. eluctatur, in vacuo ad altitudinem 58750, adeoque plusquam septies maiorem ascensurum. At enim hæc resistentia absoluta spectari non potest, quia ipsa iam parameter in medio resistente indagatur, inventaque ad determinandam amplitudinem, altitudinem, & directionem aliorum iactuum adhibetur. 4. Obest affrictus, quem globus in ipso tormento subit; sed de hoc quidem obstaculo, uti de præcedente differendum est; nam in corporibus eadem pul-

veris quantitate eodemque tormento eiectis, & æqualibus affrictus. magnopere variari non poteſt. De directione tormenti inſtrumenta nunc quidem ſatis adcurata fuerunt inventa, quibus anguli elevationis adcurate obtineri poſſint. Cæterum experientia conſtare aiunt, tormento etiam horizontaliter diſpoſito globos non nihil elevari ſupra directionis lineam, ac ſuperiorem radere cavitatis oram. Inter longitudinem machinæ, & quantitatem pulveris pyrii etiam proportio quædam intercedat, neceſſe eſt, ut nimirum globus eousque contineatur intra cylindrum, donec tota pulveris quantitas flammam conceperit. Retroceſſio tormenti facta exploſione aeris activitati in cylindrum irruenti a quibusdam tribuitur, ab aliis vi pulveris interioris verſus fundum agentis, cum tormentum globo nondum eiecto videatur retrocedere; atque ita periculum eſt, ne, ſi globus parum celeriter elabatur, concuſſio tormenti eius directionem prope orificium adficiat, ac immutet.

VI. Caillius in Mech. §.446. maximam huius theoriæ utilitatem in eo conſtitiſſe putat, quod ea geometras ſuperioris ſeculi ad Aſtronomiæ theoriam phyſicam perduxerit, inventorum omnium, quibus recentius ævum gloriari poteſt, facile pulcherrimum, atque utiliſſimum; de qua re ſequente ſectione agemus. Sed fortaſſis in prima propoſitione (§. CCLXXVIII.) qua motum in parabola expoſuimus, hæret non nemo; cum enim vires componentes quovis tempuſculo combinentur in diagonalem, quæri poteſt, cur hoc loco ſingilatim ſpatia per vim proiectionis conficienda & ſingilatim ſpatia vi acceleratrici debita computentur. R. Id potiſſimum fit ob vim acceleratricem conſtantem, quæ in demonſtranda hac propoſitione ſumitur; nec vero compoſitio virium in diagonalem obeſt, quia motu compoſito verſus quamvis plagam tantundem progreditur mobile, quantum per vires ſingulas ſeorſim progrederetur. Et quamvis ſumantur tempuſcula infiniteſima, in quibus ſpatia vi acceleratrice confecta creſcunt ordine naturali numerorum aſcendentium; tamen temporibus finitis ea ſpatia ab initio motus computata creſcunt uti quadrata temporum; alia enim ſingulorum terminorum, alia ſummarum eſt ratio. Quod quidem facile

cile ac generatim demonſtrabo ita, ut idem ad motum uniformiter acceleratum rectilineum queat adplicari. Sit numerus ſpatiolorum, qui tempore finito intra primum minutum ſecundum conficiuntur, $= n$. Quoniam ea ſpatiola creſcunt ordine naturali numerorum aſcendentium (§. LXXXIV.) erit ultimus terminus pariter $= n$; primus evaneſcens $= 0$. Conſequenter cum ſumma progreſſionis arithmeticæ ſit æqualis facto ex ſumma termini primi & ultimi in dimidium numerum terminorum, erit ſumma ſpatiolorum ſub finem primi minuti ſecundi $= n \times \frac{1}{2} n = \frac{1}{2} n^2$. Sub finem ſecundi temporis erit numerus ſpatiolorum $= 2 n$, idemque erit ultimus terminus: igitur ſumma omnium ſpatiolorum ſub finem ſecundi temporis erit $= 2 n \times n = 2 n^2$. Eſt vero $\frac{1}{2} n^2 : 2 n^2 = n^2 : 4 n^2 = 1 : 4$. Sub finem tertii temporis numerus ſpatiolorum $= 3 n$; ſub finem quarti $= 4 n$; conſequenter ſummæ $= \frac{9 n^2}{2} : 8 n^2 = 9 n^2 : 16 n^2 = 9 : 16$ atque ita porro. Cum igitur proiectile a linea proiectionis vi gravitatis conſtantis diſcedat ita, ut intra tempuſcula infiniteſima receſſus creſcant ordine naturali numerorum aſcendentium, facile intelligitur, ſummas eorum receſſuum temporibus finitis, ſi iidem ab initio computentur, creſcere ut quadrata temporum, ac proin ſingulis temporibus finitis ſecundum numeros impares 1, 3, 5 &c.

CAPUT VI.

De Motu Corporum in Ellipſi.

Ut conſtitutio ſyſtematis mundani, & inprimis ſolaris, atque planetarum motus, ac vires, & leges attractionis univerſalis recte exponi, ac percipi queant, neceſſe eſt, motum corporis in Ellipſi ante perſpectum eſſe. Quapropter concipiatur, ſeu ſingatur interea, planetarum quendam ceu Mercurium, aut Martem, circa ſo-

solem tanquam centrum virium suarum acceleratricium moveri, perinde ac si corpus terrestre sat magna celeritate proiectum circa terram tanquam centrum virium suarum moveretur. Pono autem motum planetæ circa solem fieri in ellipsi; nec vana hypothesis est. Nam paulo post ostendam, planetarum motum circa solem re vera ellipticum esse.

§. CCLXXXVIII.

Definitio I. Si conus rectus A F G (F.XII. T.V.) secatur plano S M s M, quod, si concipiatur productum in D, ad basin coni F G minorem angulum S D F faciat, quam sit angulus A G F a coni lateribus ad eandem basin formatus, sectio S M s M *ellipsis* vocatur. Si ad planum sectionis concipitur triangulum verticale F A G; erit S s, seu communis plani S M s M cum triangulo verticali intersectio, *axis maior* ellipseos; rectæ M p, m p ad axem normales, sunt *ordinatæ*: partes axeos S P, P s *abscissæ*, vel *segmenta axeos* sunt. Sed transferatur hæc sectio seu curva ex cono in planum (F. XIII.) ac in memoriam revocentur sequentes potissimum illius proprietates; (nam elementis geometriæ initiatos pono eos, qui ad Physicam Newtonianam accedunt).

1. Arcus ellipticus A P Q, A K B primo utraque ex parte ab axe A a discedit, donec in medio circa B obtineat ordinatam maximam B C; tum revertitur utraque ex parte, ita, ut perinde, ac circulus axem bis secet, formetque curvam in se redeuntem. Ordinata maxima B C ad axem maiorem vocatur semiaxis minor, quæ producta usque ad oppositum perimetri punctum fit *axis minor*. Punctum medium axis maioris A a, per quod normaliter transit axis minor, est *centrum* ellipseos. Quævis alia recta P G per centrum ducta, & in perimetro utrinque terminata, est *diameter*. Cuiusvis diametri, ut & axeos utriusque proprietas generalis est, ut suas ordinatas usque ad oppositum punctum perimetri productas bisecent. *Diameter coniugata* alterius diametri est, quæ est parallela ordinatis alterius, vel tangenti per alterius verticem ductæ: diametri P G diameter coniugata est recta D K parallela ordinatæ Q o, & tangenti P T. Axis maior & minor ab aliis diame-

tris

tris duntaxat in eo differt, quod habeat ordinatas normaliter adplicatas; quod non fit in diametris. universe autem *Quadrata ordinatarum ad axes, vel diametros sunt uti facta ex abscissis vel segmentis axium aut diametrorum respondentibus*; Sic (F. XII.) $PM^2 : pm^2 = SP \times Ps : Sp \times ps$. Porro semiaxis minor est ordinata maioris, & semiaxis maior ordinata minoris, & quævis semidiameter coniugata est ordinata alterius diametri cuius coniugata dicitur: præterea axes, & diametri in centro secantur bifariam; hinc facta seu rectangula semiaxium & semidiametrorum sunt æqualia quadratis eorundem; ac dicta proprietas in hunc modum proponi potest: *primo*: in Ellipsi quadrata adplicatarum ad axem principalem, seu maiorem sunt ad facta ex abscissis respondentibus, ut quadratum semiaxis minoris ad quadratum semiaxis maioris. *Secundo* Quadrata adplicatarum ad axem minorem sunt ad facta ex abscissis respondentibus, ut quadratum semiaxis maioris ad quadratum semiaxis minoris. *Tertio* quadrata ordinatarum ad semidiametrum coniugatam quamcunque sunt ad facta ex abscissis respondentibus, ut quadratum alterius semidiametri coniugatæ ad quadratum semidiametri illius, ad quam ordinatim est recta adplicata. Ceu (F. XIII.) $Qo^2 : Po \times oG = CD^2 : PC^2$; & $Po \times oG : oQ^2 = PC^2 : CD^2$.

2. Ipso prope intuitu ellipseos patet: quamvis diametrum esse minorem axe maiore, & maiorem axe minore, estque talis magnitudinis ratio, ut quodvis parallelogrammum super semidiametros coniugatas constructum æquale sit rectangulo ex semiaxibus; hinc cum quodvis parallelogrammum æquetur facto ex basi in altitudinem, si PH est normalis ad DK, erit $DC \times PH = AC \times CB$. Areæ vero totales plurium ellipsium sunt, uti rectangula ex semiaxibus.

3. Latus rectum seu parameter axeos maioris est tertia proportionalis ad axem maiorem & minorem; uti si parameter dicatur p; axis maior (F. XIII.) = 2 AC; minor = 2 CB erit $2AC : 2CB = 2CB : p$

$$p = \frac{4CB^2}{2AC} = \frac{2CB^2}{AC}; \text{ unde erit } \frac{1}{p} = \frac{AC}{2CB^2};$$

quæ est ratio reciproca lateris recti principalis.

4. Memorabilia axeos maioris puncta sunt bini *foci*, per quæ nempe ducta ordinata dupla æqualis est parametro. Eiusmodi puncta (F. XIII.) sunt S, & F. Ut ratio huius denominationis intelligatur, notandum: angulus T P S ad punctum contactus P inter tangentem P T & rectam ad focum S tendentem comprehensus semper æqualis est angulo t P F, qui inter eandem tangentem, & rectam ex altero foco F ductam continetur; atque ob hanc caussam, si corpus lucidum statuitur in uno foco, radii omnes in superficiem ellipticam incidentes reflectuntur in alterum focum; quoniam angulus reflexionis æquatur angulo incidentiæ: angulos autem ad punctum superficiei curvilineæ per tangentes metimur. Porro summa rectarum ex utroque foco ad idem perimetri punctum ductarum constans est, & æqualis axi principali. Rectangulum vero inclinatarum S P, P F ex focis ad quodvis ellipseos punctum, æquale est quadrato (CD^2) semidiametri CD, quæ coniugata est diametri P G ad datum punctum P terminatæ. Præterea si ad quamvis diametrum P G ducitur coniugata D K parallela tangenti P T, hæc ex recta S P ad focum ducta intercipit partem P E semiaxi principali æqualem, ut sit P E = A C.

5. Maxima est circuli & ellipseos affinitas, ut revera circulus nihil aliud sit, nisi ellipsis, cuius foci infinite propinqui sint; si enim (F. XII.) axis sectionis S s manente S, concipiatur elevari, ut s abeat in t, & axis sectionis eiusque planum basi coni fiat parallelum, ellipsis migrat in circulum, & contraria directione circulus in ellipsin. Illud quoque sine molimine demonstrant geometræ, ellipsin & circulum descriptum super media proportionali inter semiaxes ellipseos tanquam radio esse æquales, sive areas æquales continere.

§. CCLXXXIX.

Definitio II. Dum planetis orbita elliptica tribuitur, sol, circa quem moventur tanquam centrum virium, collocatur in foco quodam S; ac dein punctum A, in quo existens planeta maximam habet a sole distan-

distantiam, dicitur *Aphelium*, vel *apsis summa*: punctum vero a, in quo habetur distantia minima planetæ a sole, *perihelium*, vel *apsis ima*; unde axis maior Aa *linea apsidum* vocatur coniungens aphelium cum perihelio. Apsides etiam *Auges* nuncupant. Porro focus S, in quo sol collocatur ceu centrum virium, adpellatur *inferior*; alter F *superior*. Distantia foci a centro ellipseos, $=$ C S, est *eccentricitas*, & quoniam uterque focus æquidistat a centro, erit distantia focorum $=$ SF, dupla eccentricitas. Summa distantiarum planetæ in aphelio, & perihelio a sole, æqualis est maiori axi ellipseos, quam describit. Quemadmodum vero planeta respectu solis dicitur esse in aphelio vel perihelio; ita sol vel planeta quiscunque cum maxime a terra distat, est in *apogæo*; cum maxime ad nos accedit, in *perigæo*. Semiaxes principales, si plures orbitæ inter se conferantur, solent etiam dici *distantiæ mediæ*.

His præmissis investiganda est ratio virium, queis corpus in Ellipsi incedens in centrum urgetur. Feratur planeta in perimetro ellipseos A Pa B, cuius semiaxes sint AC, CB; & migret tempusculo infinitesimo ex P in Q, ut describatur arcus nascens PQ. a binis eius extremis ducantur radii vectores, seu rectæ, quæ simul cum arcu areolam concludant P S Q, quæ quidem areola, si tempora sumuntur æqualia, constans est. Ducatur diameter P C G, eique coniungata D K tangenti P T parallela. ea diameter occurret radio vectori P S in E, & perpendiculo in se demisso in H. fiat Q T parallela rectæ P S, & Q L parellala tangenti & diametro D K producatur in o, ut sit ordinatim adplicata ad diametrum P G. vim igitur centripetam exprimet 2 P L vel 2 Q T; nam intervallo P L mobile a directione tangentis P T, ad quam vi inertiæ nititur, retrahi debet vi centripeta, quam ex duplo spatiolo vi acceleratrice intra datum tempusculum decurso æstimamus, uti §. CCLXX. de motu in circulo est animadversum; quæritur igitur ratio istiusmodi lineolarum in diversis ellipsibus, vel diversis arcubus eiusdem ellipseos ita descriptæ, ut areæ sint temporibus proportionales.

§.

§. CCXC.

Propositio I. *Si corpus moveatur in ellipsi, ita, ut areæ ad focum terminatæ sint temporibus proportionales; vis centripeta, seu ad focum tendens est in ratione reciproca duplicata distantiarum a foco, seu centro virium.* Dem. 1. Area PSQ dicatur A; erit ea $= \frac{PS \times Qn}{2}$; proinde $Qn = \frac{2A}{PS}$, & $Qn^2 = \frac{4A^2}{PS^2}$; ponitur enim Q n perpendicularis ad S P.

2. Quoniam ordinata Q o & diameter coniugata D K sunt parallelæ, triangula P L o, P E C similia sunt; proinde $PL : Po = PE : (= AC$, def. I. n. 4.) PC. Quæratur valor P o. Ex def. I. n. 1. est $Po \times oG : oQ^2 = PC^2 : CD^2$; & quia P Q est arcus infinitesimus, erit P o infinitesima respectu o G, hinc pro o G sumi potest $PG = 2PC$ eidem æquipollens; adeoque erit $Po \times 2PC : oQ^2 = PC^2 : CD^2$;

$$\& \; Po = \frac{oQ^2 \times PC}{2CD^2}. \; \& \; oQ^2 = \frac{Po \times 2CD^2}{PC}.$$

Si igitur inventus valor P o in superiore analogia substituatur, erit $PL : \frac{oQ^2 \times PC}{2CD^2} = AC : PC$ consequenter

$$PL = \frac{oQ^2 \times AC}{2CD^2}.$$

3. Pro oQ^2 sumi potest QL^2 eidem æquipollens: si enim æquatio $oQ^2 = \frac{Po \times 2CD^2}{PC}$ resolvitur in analogiam, erit $\frac{2CD^2}{PC} : oQ = oQ : Po$; quemadmodum igitur o Q est infinitesima respectu finitæ quantitatis

titatis $\frac{2 CD^2}{PC}$; ita erit Po infinitesima respectu oQ (§. CCXXXVII) quare cum ob similitudinem triangulorum PoL, PEC habeatur $Lo : Po = EC : CP$, erunt Lo, Po eiusdem rationis; & sicut Po est infinitesima respectu oQ; ita & Lo infinitesima respectu oQ; consequenter differentia inter QL, & Qo evanescit, estque $QL^2 = \frac{Po \times 2 CD^2}{PC}$.

4. Triangula EPH, QLn similia sunt; nam ob QL, EH parallelas anguli alterni PEH, QLn æquantur; ad n & H recti sunt. Unde erit

$$QL^2 : Qn^2 \left(\frac{4A^2}{PS^2}\right) = EP^2 \ (AC^2) : PH^2$$

consequenter $QL^2 = \frac{4A^2 \times AC^2}{PS^2 \times PH^2}$. cum igitur n. 2. sit $PL = \frac{oQ^2 \times AC}{2 CD^2}$, erit substituto pro oQ^2 vel QL^2 æquali valore, $PL = \frac{4A^2 \times AC^3}{PS^2 \times PH^2 \times 2CD^2}$

5. (Definit I. n. 2.) $CD \times PH = AC \times CB$, ac proin $CD^2 \times PH^2 = AC^2 \times CB^2$; hoc substituto valore in ultima æquatione num. præc. fit $PL = \frac{4A^2 \times AC}{PS^2 \times 2CB^2}$; est autem $\frac{AC}{2 CB^2}$ ratio reciproca lateris recti; & vis centripeta $V = 2 PL = \frac{1}{PS^2} \times \frac{8A^2 \times AC}{2 CB^2}$; seu in ratione composita ex duplicata directa areæ, quovis dato tempore descriptæ, reciproca simplici lateris recti principalis, & reciproca duplicata distantiarum a centro virium: in eadem ellipsi

est

est valor $\frac{8 A^2 \times AC}{2 CB^2}$ constans; manet igitur $V = \frac{1}{PS^2}$, seu *vis ad focum directa est in ratione reciproca duplicata distantiarum a centro virium.*

Inventa vi centripeta celeritas proiectionis ad ellipsin describendam necessaria est investiganda; quo loco similem methodum, qua in circulo usi sumus (§. CCLXXVI. n. II.) adhibebimus.

§. CCXCI.

Propositio II. *In ellipsi altitudo respondens, per quam corpus motu libero, & uniformiter accelerato descendendo per vim gravitatis, quam habet in quovis dato puncto ellipseos, acquireret celeritatem proiectionis, est quarta proportionalis post axem maiorem, distantiam a foco superiore, & inferiore.* Dem. Capiatur in directione, secundum quam agit vis centripeta, P R quarta proportionalis post axem maiorem A a, distantiam a foco superiore P F, & distantiam a foco inferiore P S; dico eam esse altitudinem respondentem celeritati proiectionis. nam

1. Ex theoria gravium corpus eodem tempore t, quo motu uniformi percurrit P T, vel L Q, motu uniformiter accelerato conficit P L, & eodem tempore T, quo eadem gravitate motu uniformiter accelerato percurrit P R, motu aequabili conficeret spatium duplum seu 2 P R; hinc erit primo: $PL : PR = t^2 : T^2$. *Secundo* quoniam velocitas per 2 P R & L Q eadem est, erunt haec spatia, ut tempora, seu $LQ : 2PR = t : T$, ac $LQ^2 : 4 PR^2 = t^2 : T^2 = PL : PR$; consequenter $PL = \frac{LQ^2}{4 PR}$.

2. Ex n. 2. demonstrat. praec. $PL = \frac{oQ^2 \times AC}{2 CD^2} = \frac{LQ^2 \times AC}{2 CD^2}$. unde fit $\frac{LQ^2}{4 PR} = \frac{LQ^2 \times AC}{2 CD^2}$; ac $CD^2 = 2 AC \times PR$.

3.

3. Def. I. n. 4. $CD^2 = PF \times PS$. & $2\,AC = Aa$; hinc facta substitutione $PF \times PS = Aa \times PR$; unde nascitur analogia $Aa : PF = PS : PR$. q. e. d.

§. CCXCII.

Corollaria. I. *Celeritas proiectionis, vel qua corpus fertur in ellipsi, semper minor est ea; quae vi gravitatis, quam habet, acquiri posset descendendo usque ad centrum virium, vel ultra illud*; nam $PF < Aa$; proinde etiam $PR < PS$. II. *Deinde data distantia a centro virium PS, & inventa altitudine respondente PR inveniri etiam potest differentia altitudinis respondentis, & distantiae a centro virium RS*, quia PR semper minor est, quam PS. III. Ex his ulterius reperitur axis maior ellipseos; cum enim sit $Aa : PF = PS : PR$; erit dividendo $Aa : Aa - PF = PS : PS - PR = RS$; cum igitur summa rectarum $PF + PS$ ex utroque foco ad idem perimetri punctum ductarum aequalis sit axi principali Aa (Def. I. n. 4.) erit $Aa - PF = PS$; consequenter $Aa : PS = PS : RS$, hoc est, *axis maior ellipseos, in qua corpus fertur, est tertia proportionalis post differentiam RS altitudinis respondentis & distantiae a centro virium, & ipsam distantiam ab eodem centro.* IV Denique ex hac analogia dividendo sequitur alia: $Aa - PS\ (PF) : PS = PS - RS\ (PR) : RS$; hoc est, *distantia corporis in ellipsi moti a foco superiore, est ad distantiam eiusdem a foco inferiore, ut altitudo respondens ad differentiam altitudinis respondentis, & distantiae a centro virium.*

§. CCXCIII.

Resolvuntur Dubia de Motu in Ellipsi.

I. *Celeritas, qua corpus fertur in circulo pariter minor est ea, quae vi gravitatis, quam corpus habet, acquiri posset descendendo usque ad ipsum centrum virium* (§. CCLXXVII. n. II.) *cur ergo corpus in dato casu potius ellipsin quam circulum describit?* R. In circulo directio proiectionis seu tangens cum directione gravitatis, seu radio semper angulum rectum efficit; in motu autem

autem compoſito non modo ratio, ſed etiam angulus virium componentium ſpectandus eſt (§. CCLXXVII. n. I. ſi ergo diverſi ſunt anguli, etſi vires componentes eandem inter ſe rationem ſervent, alia atque alia diagonalis, ac proin diverſa curva deſcribatur, neceſſe eſt. Porro in ellipſi directio virium S P cum tangente nunquam rectum efficit, niſi in apſide ima, & ſumma; quoniam enim (Def. I. n. 4.) anguli S P T, F P t a tangente, & rectis ex utroque foco ad idem perimetri punctum ductis comprehenſi æquales ſunt, ii non poſſunt eſſe recti, niſi angulus intermedius S P F evaneſcat, quod duntaxat in apſidibus fit. Ergo etſi eadem, quæ in circulo, ratio virium eſſet, tamen circulus extra apſides deſcribi non poſſet.

II. *Cur ergo corpus ab apſide ima vel ſumma digreſſum non deſcribit circulum, cum in iis punctis directio tangentis cum directione gravitatis angulum efficit rectum, qui ad deſcribendum circulum requiritur?* R. Ad circulum deſcribendum præter angulum directionis rectum ea præciſe requiritur celeritas, quæ aquireretur lapſu libero usque ad *dimidiam diſtantiam* a centro virium; porro in apſide ima celeritas motus eſt maior, in ſumma vero eſt minor ea, quæ lapſu libero usque ad dimidiam diſtantiam a centro virium acquireretur; nam ex cor. IV. §. CCXCII. eſt diſtantia corporis in ellipſi moti a foco ſuperiore ad diſtantiam eiusdem a foco inferiore, ut altitudo reſpondens ad differentiam eius altitudinis & diſtantiæ a centro virium, ſeu P F : P S = P R : R S ponatur planeta P in apſide ima a, erit tum quidem diſtantia eiusdem a foco ſuperiore maior, quam a foco inferiore, proinde etiam altitudo reſpondens celeritati proiectionis maior, quam differentia eius altitudinis & diſtantiæ a centro virium, igitur altitudo reſpondens maior eſt, quam dimidia diſtantia a centro virium; contra ſi planeta eſt in apſide ſumma, erit diſtantia a foco ſuperiore minor; quam ab inferiore; ergo & altitudo reſpondens minor, quam differentia eius altitudinis & diſtantiæ a centro virium. Si planeta verſatur circa extrema puncta axis minoris, ceu in B, diſtantia ab utroque foco F & S æqualis eſt, &

qui-

quidem uti in elementis demonstratur, ea distantia æquatur semiaxi maiori; hinc etiam altitudo respondens æqualis erit differentiæ eiusdem altitudinis, & distantiæ a centro virium, hoc est, ea altitudo erit *dimidia distantia* a centro virium; at enim in iis punctis directio virium in focum tendentium cum tangente non efficit angulum rectum, proinde circulus a planeta ab iis digressio describi nequit. Cæterum quoniam in ellipsi vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro virium, erit (F XIV) vis V planetæ in aphelio A, ad vim u in perihelio a, ut $aS^2 : AS^2$; seu $V : u = \frac{1}{AS^2} : \frac{1}{aS^2}$. At si planeta in A circa centrum virium S describeret circulum, & alius in a circa idem centrum S pariter circulum describeret, ita ut areæ a quovis descriptæ sint temporibus proportionales, longe alia esset virium centripetarum ratio; nam in primis arcus seu bases AB, & ab triangulorum, seu arearum æqualium essent reciproce ut perpendicula, hoc est $AB : ab = \frac{1}{AS} : \frac{1}{aS}$, consequenter $AB^2 : ab^2 = \frac{1}{AS^2} : \frac{1}{aS^2}$. deinde quia vires in circulo sunt ut quadrata arcuum directe, & reciproce ut radii (§ CCLXX.) erit vis V in distantia AS, ad vim u in distantia aS ut $\frac{AB^2}{AS} : \frac{ab^2}{aS}$, seu $V, u = \frac{AB^2}{AS} : \frac{ab^2}{aS}$; facta igitur pro AB^2, & ab^2 substitutione, erit $V : u = \frac{1}{AS^3} : \frac{1}{aS^3}$. hoc est vires essent in ratione reciproca distantiarum a centro virium.

III. *Altitudo respondens celeritati motus ex Prop. II. est quarta proportionalis post axem maiorem, distantiam a foco superiore, & distantiam a foco inferiore; igitur* (F. XIII.) *altitudo respondens celeritati motus in aphelio* A *erit* $= \frac{AF \times AS}{Aa}$, *& altitudo respondens celeritati motus in perihelio a erit* $= \frac{aF \times aS}{Aa}$, *hoc est quoniam* $AF = aS$, *&* $AS = aF$; *altitudo respondens celeritati motus in aphelio, & perihelio eadem est; igitur non videtur satis declaratum esse, quomodo celeritates in aphelio & perihelio tantopere diversæ sint.* R. Cum altitudo respondens celeritati motus investigatur, ponitur corpus per altitudinem quæsitam descendere ea ipsa vi gravitatis, quam in dato puncto habet; etsi igitur in perihelio celeritas maior sit, quæ maiorem altitudinem videtur requirere; at vis gravitatis quoque ibidem maior est, ut proinde emenso eodem spatio maior celeritas acquiratur; e contrario quamvis in aphelio minor sit celeritas, cui acquirendæ minor altitudo sufficeret, si vis esset constans; at ibidem vis quoque gravitatis minor est. Nempe ex formula virium acceleratricium (§. XCV.) vires sunt ut quadrata celeritatum, & reciproce ut spatia decursa seu $V = \frac{C^2}{S}$, sive si spatia decursa sint eadem, $V = C^2$. Sit vis & celeritas in $A = V$ & C; in $a = u$ & c; erit $V : u = C^2 : c^2$; ac proin $C : c = \sqrt{V} : \sqrt{u}$; cumque sit $V : u = \frac{1}{AS^2} : \frac{1}{aS^2}$; erit $\sqrt{V} : \sqrt{u} = \frac{1}{AS} : \frac{1}{aS}$, ac celeritas in A ad celeritatem in a, seu $C : c = \frac{1}{AS} : \frac{1}{aS}$ nempe reciproce ut perpendicula ex centro virium in tangentem demissa. Vicissim ex eadem formula colligitur, altitudines seu spa-

ſpatia decurſa eſſe æqualia ; cum enim ſit $V = \frac{C^2}{S}$, erit $S = \frac{C^2}{V}$ ſeu $S : s = \frac{C^2}{V} : \frac{c^2}{u}$. Porro $C^2 : c^2 = \frac{1}{AS^2} : \frac{1}{aS^2} = aS^2 : AS^2$. Dein $V : u = aS^2 \; AS^2$ nempe reciproce ut quadrata diſtantiarum ; hinc erit $\frac{C^2}{V} : \frac{c^2}{u} = \frac{aS^2}{aS^2} : \frac{AS^2}{AS^2}$, quæ eſt ratio æqualitatis ; unde erit $S = s$. Etſi autem altitudo reſpondens celeritati motus in aphelio minor ſit, quam dimidia diſtantia a centro motus, & in perihelio maior ; id tamen non obſtat, quo minus altitudines reſpondentes utrinque æquales ſint ; quia in aphelio diſtantia quoque a centro virium maior eſt, in perihelio minor. Patet uſus, & conſenſus formularum. Denique & illud addendum, ſi ponuntur foci infinite propinqui inter ſe, & ipſi centro; tunc valor $\frac{AF \times AS}{Aa}$ exprimens altitudinem reſpondentem celeritati motus in apſidibus, erit $= \frac{AC \times AC}{2AC} = \frac{1}{2} AC$; ac tum nempe, quia ellipſis migrat in circulum, iterum pervenitur ad theorema Hugenii : *Si directio proiectionis eſt normalis ad directionem virium* (uti fit in apſidibus) *& celeritas proiectionis ea, quæ acquiri poſſet lapſu per dimidiam diſtantiam a centro virium, circulus deſcribetur.*

IV. *Intelligi non poteſt, qua parte ellipſeos celeritas motus creſcat, qua decreſcat ; aut quæ ſit ratio incrementi, vel decrementi celeritatis.* R. Celeritas motus per quemvis arcum infiniteſimum intelligi poteſt ex altitudine eidem reſpondente tanquam ex ſpatio, per quod

quod, si corpus vi gravitatis, quam in eo arcu habet, libere decideret, velocitatem sui motus acquiret. Altitudo respondens ceu spatium S exprimitur, ut supra, hac formula : $\frac{PF \times PS}{Aa}$, $=$ S. Ex formula paullo ante indicata habetur $C^2 = VS$, & $V = \frac{1}{PS^2}$; hinc facta substitutione erit $C^2 = \frac{PF}{PS \times Aa}$; est autem in eadem ellipsi axis maior constans ; igitur quadrata celeritatum sunt directe ut distantia a foco inferiore. Si igitur planeta ab aphelio A descendit ad perihelium a, continuo crescit distantia a foco superiore, & decrescit distantia a foco inferiore ; ergo *ab apside summa ad imam celeritas crescit : ab ima vero ad summam decrescit* ; & quia ex utraque perimetri parte circa axem transversum est punctum aliquod, ad quod ductæ rectæ ad utrumque focum æquales sunt, hinc velocitas in illis punctis æqualis erit. Ex his intelligitur, qua parte ellipseos celeritas motus crescat, qua parte decrescat. Ut autem ratio eius incrementi, ac decrementi perspiciatur, *primo* observandum est, angulum, quem tangens in quovis dato puncto ellipseos cum recta ad centrum virium ducta efficit, post aphelium usque ad perihelium esse acutum, inde post perihelium usque ad aphelium esse obtusum ; cum enim, ut supra meminimus, anguli SPT, FPt æquales sint, ac proinde uterque acutus, erit angulus SPT, qui perihelium respicit, acutus, & deinceps positus SPt versus aphelium obtusus. *Secundo* observandum est, dum planeta ab aphelio descendit ad perihelium, vis centripeta ml (F. XIV.) obliqua ad tangentem resolvitur in vim mo, & mn ; quæ posterior vis mn, cum sit parallela ad tangentem, vim tangentialem auget, motumque accelerat ; contrarium fit in ascensu a perihelio ad aphelium. Illud præterea deducitur planetam magis accedere ad centrum virium, si posita vi centripeta æquali, ea sub acuto, quam si sub angulo obtuso conspiret cum vi tangentiali ; unde ratio acces-

acceſſus & receſſus colligi poteſt ; nam radius vector S P (F. XIII.) cum tangente per P ducta continet angulum acutum ad partes apſidis imæ a , & obtuſum ad partes apſidis ſummæ A ; dein ex rectis omnibus , quæ ex foco S duci poſſunt ad perimetrum , omnium minima eſt S a , omnium maxima S A ; præterea recta S P ſeu radius vector ab apſide ima ad ſummam ſemper creſcit , & a ſumma ad imam decreſcit. In ipſis apſidibus angulus virium componentium eſt idem , nempe rectus ; at in apſide ima celeritas vis tangentialis maior eſt , quam ut circulus deſcribi queat ; hinc planeta ab ima digreſſus pariter a centro magis recedet ; in apſide ſumma ea celeritas vis tangentialis eſt minor , quam motus in circulo depoſcat : igitur planeta inde digreſſus iterum accedere incipiet ad centrum virium.

V. *Si vis gravitatis creſcit , quantum diſtantiæ quadratum decreſcit , videntur planetæ denique omnes in ſolem labi debere ; nec ſatis intelligitur , quomodo ii a perihelio , ubi maxima vi in ſolem urgentur , iterum aſcendere , magisque removeri a centro , aut ab aphelio , ubi minore vi aguntur in ſolem , tamen ad ipſum deſcendere queant.* R. " Hanc difficultatem (inquit inſignis Geometra noſtri ævi) tanquam inſolubilem clamoribus toties repetitis obiecerunt Newtonianæ theoriæ ii , qui primum tantummodo , & extimum quendam theoriæ ipſius veluti corticem attigerunt , durioribus , quæ internam medullam concludunt , prorſus intactis. " Nempe ſupra oſtenſum eſt , acceſſum vel receſſum , præterea augmentum & decrementum celeritatis extra apſides pendere ab angulo virium componentium ; in apſidibus pendet a maiore vel minore celeritate motus relate ad vim centripetam , quam opus ſit , ut planeta in eadem a centro virium manens diſtantia , circulum deſcribat.

SECTIO VI.

De Analytica investigatione gravitatis universalis corporum.

CAPUT I.

De Situ corporum totalium mundi.

Qui principiis Mechanicæ adhuc explicatis sat instructus est, tuto iam cœlum conscendet, gravitatem universalem omnium corporum deducturus; quod igitur regiones, ac urbes peregrinas visentibus familiare est, ut primo situm earundem, atque ædificia intueantur, postea singularem indolem, mores, ac leges explorent; sic idem faciendum hoc loco arbitror, ut astrorum, corporumque mundi totalium situm, positionesque, & ordinem generatim antea contemplemur, quam particularia phænomena subiiciamus examini.

§. CCXCIV.

Observatio I. Cælum intuentibus nobis ex hac terra, id instar superficiei sphæricæ concavæ, plurimis stellis, quas *corpora mundi totalia* dicimus, distinctæ adparet, in cuius superficiei cavæ centro nobis constituti videmur; ac si in campo patente, altioreve loco positi oculos circumferimus, visum plano circulari terminari observamus, supra quod quæ existunt, conspici a nobis possunt, quæ infra illud latent, conspici non possunt. Porro ut positiones stellarum, ordinem motusque varios determinemus, puncta quædam fixa in ea superficie cava concipimus, dein sphæram hanc amplissimam diversis circulis secamus.

§. CCXCV.

Definitio I. Si ex quovis loco S in ſuperficie terræ (F. XV. T. V.) ducatur per centrum terræ T linea recta Z S N, quæ ſphæræ cæleſti occurrit in Z & N, punctum Z dicitur loci S vel ſpectatoris in S poſiti *Zenith*, ſeu vertex, & punctum N vocatur eiusdem *Nadir*. *Horizon ſenſibilis* ſeu adparens loci S eſt ſphæræ circulus h u r x, centrum habens in S, & polos in Z, & N. Dicuntur autem *poli circuli cuiusvis* bina puncta oppoſita alterius circuli ad priorem verticalis, quæ 90° gradibus, ſeu integro quadrante a peripheria alterius diſtant. *Horizon rationalis*, ſeu verus eſt circulus H V R X, centrum habens in T terræ centro, & polos in Z, & N, adeoque horizonti ſenſibili parallelus.

Diſtantia horizontis adparentis ab horizonte vero, ſive telluris ſemidiameter S T, ſenſibilis vix eſt, ſi conferatur cum ſtellarum (luna fere ſola excepta) diſtantiis, & ideo terra reſpectu ſphæræ ſtellarum tanquam punctum, & quilibet terræ locus tanquam huius ſphæræ centrum conſiderari poteſt; id quod omnes fere aſtronomorum obſervationes ita ſumunt, ut calculi inde initi cum phænomenis cæleſtibus conſentiant. Porro quemadmodum ſingula terræ loca pro centro ſphæræ cæleſtis uſurpari poſſunt; ita in ſpatiis cæleſtibus diameter ſuperficiei ſphæricæ tanta eſſe poteſt, ut illius reſpectu, ſolis a tellure diſtantia evaneſcat; adeoque poterit huius ſphæræ centrum vel in terra, vel ſole, vel quovis ſpatio intermedio collocari.

§. CCXCVI.

Obſervatio II. Tota ſuperficies cava cæli circa puncta quædam fixa ſeu cardines ab ortu ad occaſum æquabiliter convertitur, & intra 24 horas circiter integram revolutionem abſolvit. Puncta illa oppoſita P & p, circa quæ rotari videtur ſphæra, *Poli mundi* dicuntur, quorum is, qui nobis conſpicuus eſt, ut P, *arcticus* ſeu *borealis* dicitur, eidemque appoſitus *antarcticus* ſeu auſtralis. Recta linea P p utrumque connectens,

axis mundi vocatur. Si eiusmodi revolutionem ſæpius obſervamus, videmus ſtellas quasdam eandem inter ſe diſtantiam perpetuo obſervare. Has adpellamus *fixas*; aliæ diſtantias ſuas a fixis in dies mutant, & præter communem ac diurnum motum ab ortu in occaſum etiam motu proprio ferri conſpiciuntur; quas idcirco nuncupamus *planetas*, ſeu ſtellas erraticas. Planetæ ſuis propriis ſignis notari ſolent: Mercurius ☿, Venus ♀, terra ♁, Mars ♂, Jupiter ♃, Saturnus ♄; ſolis ſignum eſt ☉, lunæ ☾.

§. CCXCVII.

Definitio II. *Æquator*, *ſive æquinoctialis* eſt circulus ſphæræ cæleſtis maximus, ſive per centrum eiusdem tranſiens, cuius poli iidem ſunt cum polis mundi; proindeque ſphæram mundanam dividit in 2 hemiſphæria, boreale Æ P Q, cuius eſt polus borealis P, & auſtrale Æ p Q, in quo eſt polus auſtralis p. Ac obſervamus ſtellas ſingulas extra æquatorem ſitas in circulis minoribus, quorum centrum eſt in axe mundi, & æquatori parallelis communi quodam motu in dies revolvi, eo diſcrimine, quod planetæ alios præterea proprios habeant motus. Continentur autem planetæ certa plaga, quæ inſtar faſciæ concipitur, & adpellatur *Zodiacus*, cuius medius circulus eſt *Ecliptica*, ſeu circulus ſphæræ maximus, quem centrum ſolis motu proprio ab occaſu ad ortum ſingulis annis videtur deſcribere; hic circulus æquatorem oblique interſecat ſub angulo inclinationis 23 $\frac{1}{2}$ graduum circiter. Bina puncta oppoſita, in quibus æquator, & ecliptica ſe mutuo interſecant, dicuntur *æquinoctialia*, quod ſole in iis poſito dies nocti ubique terrarum æqualis ſit, & inde tempus, quo ſol alterutrum punctum æquinoctiale attingit, *æquinoctium* vocatur. Punctum æquinoctiale *vernale* eſt, unde ſol motu proprio verſus polum borealem aſcendere videtur in ecliptica: *Autumnale* vero, unde ſol verſus polum auſtralem deſcendit, ideoque æquinoctium eſt vernale, vel autumnale. Puncta *Solſtitialia* ſunt eclipticæ duo puncta oppoſita, quæ a punctis æquinoctiali-

libus toto circuli quadrante diſtant, quæque proin maxime ab æquatore recedunt, & in quibus aſcenſus ſolis ſupra æquatorem, & deſcenſus infra eundem terminatur; unde circuli minores per ea puncta ducti æquatori paralleli *Tropici* vocantur, quaſi ſol ibi curſum ſuum verteret. Eorum punctorum alterum dicitur *æſtivum*, alterum brumale, ſeu *hybernum*. Vocantur ſolſtitia, quod ſole in iis verſante per aliquot dies ex eodem horizontis puncto oriri, & e regione in puncto oppoſito occidere videatur. Porro ſignum cæleſte eſt duodecima pars Eclipticæ, & in 30 gradus rurſus dividitur. Principium primi ſigni eſt in puncto æquinoctiali verno, a quo ſigna numerantur ſecundum proprium motum ſolis ab occaſu in ortum; ſuntque ſex ſigna borealia, & in his tria verna, *aries*, *taurus*, *gemini*; tria æſtiva, *cancer*, *leo*, *virgo*. Sex auſtralia, & in his denuo tria autumnalia, *libra*, *ſcorpius*, *arcitenens*, & tria hyemalia: *caper*, *amphora*, *piſces*. Signa aſcendentia a puncto ſolſtitiali hyberno ad æſtivum, deſcendentia a ſolſtitiali æſtivo ad hybernum computantur.

§. CCXCVIII.

Definitio III. *Circuli declinationis*, ſeu *circuli horarii* ſunt circuli maximi per mundi polos tranſeuntes & proinde æquatori perpendiculares. Sideris vel puncti cuiuslibet in ſphæra mundana *declinatio* eſt arcus circuli declinationis inter ſidus, & æquatorem interceptus. *Aſcenſio recta* ſideris eſt arcus æquatoris inter punctum æquinoctiale vernum & circulum declinationis ſideris illius comprehenſus, ac ſecundum ſeriem ſive ordinem ſignorum numeratus. *Circuli latitudinis* ſiderum ſunt circuli ſphæræ maximi per polos eclipticæ & ſidera tranſeuntes, atque ideo ad eclipticam perpendiculares. Hinc *latitudo ſideris* eſt arcus circuli latitudinis inter ſidus, & eclipticam interceptus. *Longitudo ſideris* eſt arcus eclipticæ ab arietis initio ſecundum ſeriem ſignorum ſive in conſequentia usque ad circulum latitudinis numeratus. Punctum interſectionis eclipticæ cum circulo latitudinis ſideris vocatur *locus ſideris eclipticus*, ſive *locus in ecliptica*, vel *ad eclipticam reductus*.

§. CCIC.

Definitio IV. *Circulus verticalis* eſt quivis circulus maximus Z V N X, per Zenith, atque Nadir, & per aliud quodcunque punctum in ſphæra mundana tranſiens, adeoque horizonti perpendicularis; *Meridianus* eſt circulus verticalis Z P N H per polos mundi P & p tranſiens, & conſequenter æquatori perpendicularis, & circulos æquatori parallelos bifariam dividens. Interſectio plani meridiani cum plano horizontali H R, vel h r nuncupatur *linea meridiana.*

§. CCC.

Definitio V. *Altitudo poli* ſupra horizontem eſt arcus meridiani P R a polo ad horizontem interceptus. Ea ſemper æqualis eſt arcui Z Æ a vertice Z ad æquatorem Æ intercepto; nam ſi ex circuli quadrantibus Z P R, Æ Z P ſubtrahatur arcus communis Z P, remanebunt arcus æquales Æ Z, & P R. *Altitudo æquatoris* ſupra horizontem eſt arcus meridiani Æ H inter æquatorem, & horizontem interceptus; ea æqualis eſt complemento altitudinis poli ſeu arcui Z P; nam ſubducto ex quadrantibus Z Æ H, P Z Æ communi arcu Æ Z, relinquuntur arcus Æ H, Z P æquales. *Altitudo adparens ſideris*, vel puncti cuiuslibet in ſphæra mundana eſt arcus circuli verticalis inter ſidus, & horizontem ſenſibilem interceptus: *altitudo vera* ſideris eſt arcus eiusdem circuli verticalis inter ſidus, & horizontem rationalem interceptus. Reſpectu fixarum, & ſolis eædem ſunt altitudines adparentes, & veræ (Conf. Schol. §. CCXCV.)

§. CCCI.

Obſervatio III. Dum radius lucis a ſideribus verſus oculum ſpectatoris propagatus ex aere rariore in denſiorem tranſit, is non per rectam continuam fertur, ſed in puncto incidentiæ refringitur ad perpendiculum ita, ut ſinus anguli inclinationis ad ſinum anguli refracti ſemper ſit in certa ratione (§. LXXX.) Si (F. XVI. T. V.) pars atmoſphæræ C X F circumfuſæ quadran-

dranti telluris A D divisa intelligatur in superficies vel tenuissimas crustas sphæricas terræ superficiei concentricas C X F, B V E, aer inter binas eiusmodi superficies contentus, & a pondere superioris aeris compressus eo densior erit, quo minus a telluris centro T distabit. Sit Z S H circulus verticalis ex centro telluris descriptus; arcus S H altitudo sideris supra horizontem rationalem T H; & Z S distantia sideris a vertice Z. Si radius lucis S X a sidere S propagatus incidat in atmosphæram in X; is refringetur per X V accedendo ad perpendiculum hoc est, ad semidiametrum T X, qui ad superficiem sphæricam est perpendicularis, & quoniam densitas aeris in V maior est, quam in X, radius in puncto V superficiei sphæricæ rursus eodem modo refringetur ad perpendiculum T V; atque ita radius per alias atque alias crustas, quarum densitas identidem crescit, continuo incurvabitur, & in lineam X V A versus centrum T cavam flectetur. Hanc curvam tangat in A recta A s, circulo verticali Z H occurrens in s; quia radius lucis S X V A oculum spectatoris in A ingreditur secundum directionem tangentis A s, sidus, quod revera est in S, videbitur in s, loco nempe altiore; atque ita *refractio magis attollit sidera supra horizontem*; quia obiectum in ea recta conspicitur, secundum quam fit directio radiorum oculos ingredientium.

Sideris in vertice Z constituti nullam esse refractionem, ex legibus refractionis patet; itemque perspicuum est, refractiones solis, lunæ, fixarum ac siderum omnium extra terrestrem atmosphæram constitutorum, in paribus a vertice distantiis æquales esse. Astronomi refractiones ad singulos altitudinis gradus definierunt; eædem diversis anni temporibus in pari altitudine æquales manent, exceptis refractionibus circa horizontem, quæ non nullis mutationibus obnoxiæ sunt. Et quoniam radiorum lucis in atmosphæram incidentium obliquitas cum sideris a vertice distantia crescit, per observationes inventæ sunt refractiones siderum a vertice ad horizontem usque, ubi maximæ sunt, continuo augeri.

S.

§. CCCII.

Definitio V. Parallaxis ſideris, aut phœnomeni cuiuſcunque eſt diſtantia locorum in ſphæra cæleſti, ad quæ ſidus, aut quodvis phænomenon e ſuperficie telluris, & ex eius centro ſpectatum refertur, ſive eſt arcus circuli maximi inter illa duo loca interceptus. Sit T centrum telluris, ac cæli (F. XVII. T. V.) A oculus ſpectatoris in ſuperficie terræ; Z zenith loci A; Q ſidus, vel phænomenon quodvis; C Q P verticalis per ſidus tranſiens; Z S X H verticalis in ſuperficie ſphæræ cæleſtis; A B verticalis in ſuperficie terræ: T H horizon rationalis, & A h horizon ſenſibilis. His ita conſtitutis ſequentes notiones animo concipiendæ ſunt. 1. *Locus phyſicus* ſideris Q eſt punctum illud, in quo ſideris centrum hæret. 2. *Locus opticus adparens*, ſeu viſus eſt punctum V in ſuperficie ſphæræ cæleſtis, in quo recta ex oculo A per centrum ſideris Q ducta terminatur. 3. *Locus opticus verus* eſt punctum S in ſuperficie ſphæræ cæleſtis, in quo terminatur recta ex centro terræ T per centrum ſideris Q ducta. 4. *Parallaxis* eſt arcus S V, ſive differentia locorum opticorum veri, & adparentis. 5. *Angulus parallacticus*, qui plerumque etiam parallaxis nominatur, eſt angulus A Q T, quem in centro ſideris efficiunt rectæ A Q, T Q ex oculo A, & ex terræ centro T ad ſideris centrum Q ductæ. 6. *Parallaxis altitudinis*, quæ & parallaxis ſimpliciter dicitur, eſt differentia inter diſtantiam Z V a zenith Z ex loco A viſam, & diſtantiam veram Z S; nempe arcus S V in circulo verticali Z S V H.

§. CCCIII.

Corollaria. I. *Si terræ ſemidiameter A T ad diſtantiam ſideris a terra non habet rationem ſenſibilem, nulla erit eius ſideris parallaxis.* Quo enim maior eſt diſtantia ſideris a terra, eo minor fit angulus A Q T, & ſi A T relate ad reliqua bina latera A Q, T Q evaneſcit, pariter angulus A Q T evaneſcet. II. *Parallaxis S V eſt menſura anguli parallactici A Q T.* Iungatur enim

T V;

T V; eritque angulus externus A Q T æqualis duobus internis oppositis Q T V, & Q V T; sed angulus Q V T, sive A V T evanescente A T respectu T V est nullus; ergo angulus parallacticus A Q T æqualis est angulo Q T V, sive S T V, cuius mensura est arcus S V. III. *Manente eadem sideris a centro terræ distantia sinus parallaxium sunt ut distantiæ visæ a vertice, sive ut cosinus altitudinum sideris.* Nam in triangulo A Q T est A T ad Q T, uti sinus parallaxeos A Q T ad sinum anguli T A Q, hoc est ad sinum anguli Z A V sive ad sinum distantiæ visæ Z V a vertice, qui est cosinus altitudinis sideris supra horizontem A h. Sit distantia sideris a centro terræ D; sinus parallaxeos = sin. P. Distantia a vertice Z sit = A; erit A T semid. terræ : D = sin. P: A; & si ponitur D distantia sideris a centro terræ constans; & alia parallaxis p, aliaque distantia a vertice *a*; erit: A T semidiam-terræ : D = sin. p: *a*; consequenter sin. P: sin. p = A: *a*. Hinc sequitur IV. *Si datur parallaxis in aliqua a vertice distantia, ea reperietur in quavis alia.* V. *Sideris in vertice Z constituti parallaxis est nulla*; nam tunc A & a = o. VI. *Quo maior est sideris a vertice distantia, eo maior est parallaxis; & in horizonte est maxima*; tum enim fit A = 1 sive sinui toti; quare data sideris parallaxi horizontali obtinetur parallaxis cuivis datæ, vel observatæ altitudini respondens, si fiat: ut sinus totus ad cosinum altitudinis datæ, vel observatæ; ita parallaxis horizontalis ad parallaxin altitudinis datæ vel observatæ. VII. *Sinus parallaxium siderum Q, & q in æqualibus distantiis adparentibus a vertice sunt in ratione reciproca distantiarum siderum a centro terræ.* Sit distantia utrinque a vertice = A; sinus parallaxis sideris Q = sin. P, & in sidere q = sin. p; erit A T : Q T = sin. P: A, & q T : A T = sin. p : A; unde fit sin. P: sin. p = q T : Q T. Colliges: *Siderum in eadem altitudine adparente existentium, illius maiorem esse parallaxin, quod minus distat a centro terræ.* VIII. *Parallaxis sidera deprimit*, uti refractio attollit, sive parallaxis veram altitudinem sideris minuit, eiusque a vertice distantiam auget, quod vel inspectione figuræ manifestum est.

Ut

Ut usus observationum parallaxeos exemplo declaretur, sit (F. XVII. T. V.) parallaxis $APT = 8'', 7$, *qualis ex observationibus ultimis transitus veneris per discum solis in distantia media solis a terra fuit reperta; erit hic angulus* APT *idem, sub quo e centro solis semidiameter telluris spectaretur; hinc vera distantia solis a tellure innotescit; assumta enim* AP *ceu radio, &* AT *tangente, est tangens anguli* $APT = 8'', 7$ *ad radium seu sinum totum, ut* AT *semidiameter telluris ad distantiam a sole* AP. *Quoniam ergo sinus, arcus, tangens anguli* $8'', 7$ *sensibiliter non discrepant, duntaxat opus est, ut radius ad secunda minuta redactus per hunc arcum dividatur. Continet autem circulus* $360^{\circ} = 1296000''$. *Ratio diametri ad peripheriam in paucis numeris præ cæteris adcurata est* $= 1000 : 3141, 5$; *hinc erit radius ad peripheriam* $= \frac{1000}{2} : 3141, 5 = 1000 : 6283$. *Fiat* primo $6283 : 1000 = 1296000$: *ad radium in minutis secundis, qui reperitur* $= 206270, 889$. Secundo *fiat:* $8'',7 : 206270, 889 = 1 : 23709, 29$; *quæ est distantia media solis a terra in semidiametris terræ.*

§. CCCIV.

Hypothesis. Ut innumerabilium corporum cælestium ordo quidam determinetur, variique eorum motus, ac phænomena quam facillime explicentur, sumatur nunc instar hypothesis id, quod ipsa motuum, ac phænomenorum expositione pro thesi, ac genuino systemate habendum esse indubitato constabit. Duas esse corporum cælestium sive globorum totalium classes supra diximus, fixas, & errantes. I. Stellæ fixæ omnes, quarum innumerabilis est multitudo, ad distantiam a nobis adeo immanem sunt positæ, ut ipsa distantia terræ a sole respectu eius distantiæ instar puncti sit, & evanescat. Has (F. XVIII. T. V.) extimus circulus, ubi 12 signa Zodiaci adscripta sunt, denotat. Hæ omnes luce propria fulgent, uti sol, qui ex earum numero est, ita, ut illæ ob eam duntaxat caussam minores sole, & minus lucidæ adpareant, quod a nobis in immensum magis distent. II. Remotis iam stellis fixis unica excepta, nempe sole is collocetur in medio S. III. circa hunc

velu-

veluti centrum revolvuntur planetæ primarii ſex hoc ordine, Mercurius, Venus, terra, Mars, Jupiter, Saturnus. IV. quidam ex primariis planetis ſuos ſatellites, habent, qui circa ipſos revolvuntur, & cum ipſis una circa ſolem; ſunt eiusmodi ſecundarii planetæ 10. Luna ſatelles ſeu comes terræ, quatuor Jovis ſatellites, & quinque Saturni. Accedit annulus circa Saturni globum tenuis, & latus, ab eo circumquaque diſiunctus. V. Ad primarios planetas cometæ pertinent, qui circa ſolem tanquam centrum ita moventur, ut non niſi exigua orbitæ ſuæ parte, quando propius ad ſolem deſcendunt, conſpicuos ſe nobis præbeant, tum ad maximas diſtantias etiam ultra Saturnum iterum recedant. VI. Planetæ omnes primarii & ſecundarii, ac cometæ a ſole potiſſimum lumen accipiunt, ac reflectunt, ſuntque opaca corpora. VII. Admodum probabile eſt, eosdem habere figuram proxime ſphæricam, quod de planetis fere omnibus eſt omnino certum; Jupiter tamen figuram ſphæroidis refert non ita parum compreſſæ. VIII. Convertuntur planetæ circa proprium axem; qui eſt *motus vertiginis* in aliis celerior, in aliis tardior. IX. Motus vero planetarum primariorum, queis orbitas ſuas circa ſolem conficiunt, omnes fiunt ab occaſu in ortum in planis ad ſe invicem aliquantum inclinatis, in ſpatio cæleſti, ubi nulla, aut fere nulla eſt motus reſiſtentia. Planum illud, in quo movetur tellus, adpellatur Ecliptica, ad quam aliorum plana ſeu orbitæ inclinantur, ita ut puncta, in quibus planum Eclipticæ interſecant, *nodi* vocentur; eſtque *nodus aſcendens*, in quo tranſitur ab hemiſphærio auſtrali ad boreale, alter vero *nodus deſcendens*. Porro ſol una cum planetis primariis, & ſecundariis eo, quo diximus, ordine diſpoſitis, adnumeratis præterea cometis *ſyſtema ſolare*, vel *planetarium* conſtituit.

CA-

CAPUT II.

De Gravitate planetarum in solem.

Explicandæ hoc loco sunt regulæ Keplerianæ observationibus, & calculis innixæ; tum Newtoniana gravitatis diductio haud admodum captu difficilis videbitur.

§. CCCV.

Regula I. *Planetæ primarii circa solem volvuntur in orbitis ellipticis, ita, ut singularum ellipsium focum alterum sol occupet.* Nam *primo* planetæ curvas describunt in se redeuntes, quippe qui post certum dierum, vel annorum numerum ad idem cœli punctum, unde ante digressi sunt, reverti observantur. *Secundo*, motus suos peragunt circa solem, quos quidem si concipiamus ex ipso sole nos intueri, facile intelligimus, eos summo & constante ordine ab occusu in ortum peragi, cum iidem e terra spectantibus nobis sæpenumero perturbati videantur. Planetas quidem inferiores, id est, Mercurium, & venerem, circa solem moveri eorundem *phases*, id est, variæ disci partim illuminati, partim tenebris obducti adparentiæ ostendunt. Hi quidem terram suis orbitis non complectuntur; sed ita circa solem circumeunt, ut aliquando longius a nobis, quam sol absint, alias inter nos, & globum solarem transeant; at vero soli nunquam opponuntur, ita ut terra inter ipsos & solem media sit, neque ab eo ultra certæ magnitudinis arcum discedunt, qui *maxima elongatio* dicitur. Planetarum superiorum uti Martis, Jovis, Saturni orbitæ terram suo ambitu constringunt: verum eorum motus ita sunt comparati, ut, si ad tellurem referantur, extra omnes leges Physices vagentur, nullumque secundum principia Mechanices explicatum habeant; nam alias ab occasu in ortum progredi, alias stare eodem prope cœli puncto, aliquando etiam retrogredi videntur; nequit igitur terra eorum motuum centrum constitui. Mars quidem, dum in oppositione est cum sole, septies teste Keillio maior videtur, quam dum coniunctioni adpropinquat, propterea quod priore

ca-

caſu, dum eſt in M multo propior ſit telluri T, quam in m (F XVIII.) Similia obſervantur in Jove, & Saturno, etſi multo minore diſtantiarum varietate. Poſteaquam animadverſum erat, planetas circa ſolem in curvis redeuntibus in ſe ipſas moveri, ſpecies eius curvæ erat determinanda; ac comperit Keplerus poſt plurimas obſervationes, ac moleſtiſſimos calculos, curvam, quam planetæ circa ſolem deſcribunt, utrinque ad latera magis compreſſam eſſe, quam ad vertices; hinc ellipſin circulo ſubſtituit, quo omnes ante eum aſtronomi utebantur; & ſane exploratum dein eſt, ellipſin motibus & diſtantiis planetarum explicandis, atque univerſæ motuum theoriæ omnino congruere. Et quoniam ſinguli planetæ durante una revolutione tantum ſemel veniunt ad aphelium, & ſemel ad perihelium; perſpicuum eſt, ſolem non poſſe in centro ellipſeos collocari; ibi enim ſi exiſteret, dictum phænomenon bis ſingulis revolutionibus contingeret. Nam eſſent planetæ bis in aphelio, dum per extrema puncta axis maioris A & a (F XIII. T. V.) tranſirent, & bis in perihelio, dum extrema axis minoris puncta attingerent.

§. CCCVI.

Regula II. *Planetæ in ellipſibus ſuis non feruntur motu æquabili; deſcribunt tamen areas temporibus proportionales, æqualibus æquales duplis duplas.* Ex æqualitate arearum æqualibus temporibus deſcriptarum, & ex variata planetæ a ſole diſtantia facile intelligitur, nec *celeritatem linearem veri motus* per quemvis ellipſeos arcum AB, & ab (F. I. T. VI.) nec converſionem angularem circa punctum S, quod eſt centrum æqualium arearum eſſe conſtantem, & æquabilem; cum enim areæ æqualibus temporibus deſcriptæ æquales ſint, neceſſe eſt, ut maior amplitudo anguli in foco S, & maior per arcum orbitæ celeritas compenſent minorem in diſtantiis planetæ minoribus productionem ipſius ſectoris elliptici.

Qui & hanc regulam, & præcedentem accuratius demonſtratam cupit, ſequentia adnotet. Primo. *Velocitas an-*

angularis vera corporis est angulus, quem radii vectores arcum dato tempore descriptum intercipientes comprehendunt. Motus *medius, seu velocitas angularis media est, quam corpus haberet, si eodem tempore, quo integram revolutionem absolvit, motu semper æquabili progrederetur; invenitur proin motus medius pro dato tempore ex hac analogia: ut tempus revolutionis integræ ad* 360°, *ita tempus datum ad motum medium ei respondentem.* Secundo. *Celeritas angularis vera corporis intra exigua tempora æqualia exiguos arcus describentis est in ratione reciproca duplicata distantiarum a centro virium; Sint enim bini sectores elliptici, qui temporibus exiguis percursi pro circularibus haberi possunt,* S, & s, *radii seu distantiæ a centro virium* R & r, *anguli intercepti* A, & a; *Si radii æquales ponuntur, eo maior erit sector, quo maior est angulus, ut sit* $S : s = A : a$. *Si autem anguli æquales sint, radii inæquales; erunt iidem sectores circulorum suorum partes similes, proinde in ratione duplicata radiorum, fietque* $S : s = R^2 : r^2$: *Si ergo & radii & anguli differant, erit* $S : s = A R^2 : a r^2$. *Ex hypothesi areæ intra æqualia tempora percursæ, sunt æquales, ut sit* $S = s$; *proinde* $A R^2 = a r^2$, & $A : a = r^2 : R^2$ *hoc est, anguli radiis vectoribus intercepti, sive celeritates angulares sunt reciproce, ut quadrata distantiarum a centro virium. Hinc si observentur velocitates angulares, seu anguli intra exigua tempora ad centrum virium descripti, qui sint e. g.* 500ma, *vel* 600ma, *pars totius revolutionis periodicæ, ratio distantiarum a centro virium, & proinde figura ipsius traiectoriæ determinari (F. II. T. VI.) potest.* Tertio. *Si corpore quodam ellipsin* $A N a M$ *describente circa centrum virium* S, *concipiatur aliud corpus circa idem centrum eodemque tempore circulum* $M T N$ *percurrere, manifestum est ob æqualitatem temporum periodicorum aream circuli æqualem esse areæ ellipseos, ac velocitatem mediam in circulo & ellipsi esse eandem (ex ipsa notione motus medii) His positis sint (F. I. T. VI.) arcus* $G g$ *in ellipsi, &* $R r$ *in circulo eodem tempore descripti; ductis radiis vectoribus, &* $G o$ *ad* $S G$ *perpendiculari, sectores* $G S g$, $R S r$ *erunt areæ triangulares æquales; hinc ob rationem basium, &*

alti-

altitudinum reciprocam, erit $Rr : Go = SG : SR$; *præterea sunt arcus* $Go : Ru = SG : SR$; *quare compositis rationibus fiet* $Rr : Ru = SG^2 : SR^2$; *sed* Ru *metitur angulum* GSo, *seu velocitatem angularem veram, sicut arcus* Rr *metitur velocitatem mediam; quare velocitas angularis media est ad velocitatem angularem veram in ratione duplicata distantiæ corporis a centro virium ad radium circuli, cuius area ellipseos descriptæ aream adæquat. Uti igitur* SG *fuerit maior, æqualis vel minor, quam* SR, *hoc est, uti arcus fuerit vel extra circulum in arcu* MAN, *vel in punctis* M, N, *vel intra circulum in arcu* MaN; *ita erit* Rr, *seu velocitas corporis media maior, vel æqualis, vel minor velocitate vera* Ru. *Sunt itaque puncta* M, & N *termini accelerationis & retardationis motus angularis veri respectu motus medii,* Quarto. *Ex observationibus manifeste deducitur, diametrum adparentem planetarum modo augeri, modo imminui, & velocitates quoque angulares æqualibus temporibus non easdem esse, etsi observationes ex ipso solis centro fierent; quapropter apertissimum est, solem non esse in centro circuli, siquem planetæ describerent; secus & distantia, consequenter diameter quoque adparens, & velocitas constans foret. Sed nec statui potest, planetas in circulis excentricis moveri; Nam* quinto *Sit e. g. Mercurii orbita* $ANaM$ *circulus, (F. II. T. VI.) cuius centrum in* C, *sol & observator in* S. *ducatur per* C & S *linea apsidum* ACa: *erit* Sa *minima,* SA *maxima distantia Mercurii a sole: perihelium in* a, *aphelium in* A. *Puncto* S *tanquam centro radio* CA *describatur circulus* $MTNIM$, *cuius area ob æqualitatem radiorum æquatur areæ traiectoriæ a Mercurio descriptæ. Summa, qua fieri potest, adcuratione determinetur ratio rectarum* SA *ex velocitate angulari minima,* Sa *ex maxima,* SN *ex media per num. præc. Sic in Mercurio, si assumitur* $SN = 1000$, *velocitas media intra* 4 *horas ex tempore integræ revolutionis* 87 *dierum,* 23 *h.* 15′. 32″ *per analogiam num. primo indicatam reperitur* = 40′. 55″. 4. *velocitas maxima tempore* 4 *hor. ex observationibus habetur* = 1°, 3′. 55″. *fiat: velocitas maxima, est ad velocitatem mediam, uti* SN^2 *ad* Sa^2, *(per num. secundum) atque*

ita reperitur $Sa = 800. 11.$ *&* $SA = 1222. 441.$ *quodsi iam vera traiectoria planetæ esset circulus, erit* $Aa = AS + Sa = 2SN$*; quod observationibus evidenter pugnat ; deberet enim esse* $2022. 552 = 2000.$ *quare traiectoria planetarum nequit esse circulus; sed cum semisumma rectarum* $AS + Sa$ *sit minor, quam* SN, *manifestum est, quod curva ad puncta* M *&* N *sit magis compressa, quam in* A, *&* a. *Atque hoc modo Keplerus inductus est, ut ellipsin circulo substitueret.*

§. CCCVII.

Regula III. *Quadrata temporum periodicorum sunt ut cubi distantiarum mediarum , quas a sole habent.* Id ut intelligi queat , satis est proximas rationes temporum ac distantiarum assumere ; Si distantia media terræ a sole , sive semiaxis orbitæ telluris fiat = 10 ; erit distantia Mercurii ab eodem sole = 4 ; Veneris = 7. Martis = 15. Jovis = 52. Saturni = 95. fiat : ut cubus distantiæ terræ = 1000 ad quadratum sui temporis periodici = 144 (istuc rotunde per 12 menses exprimendo) ita cubus distantiæ cuiusvis planetæ primarii ad quadratum sui temporis periodici. Hinc reperitur pro

☿ 1000 : 144 = 64 : 9, 216. hinc temp. period. proxime = 3 Mens. seu 88 d.

♀ 1000 : 144 = 343 : 49, 392. = 7. 224$\frac{2}{3}$

♂ 1000 : 144 = 3375 : 486 , 000 = 22. 1. an. 322 d.

♃ 1000 : 144 = 140608 : 20247, 552. = 142. 11. 314$\frac{1}{2}$ d.

♄ 1000 : 144 = 857375 : 123461,000. = 351. 29. 168 d.

Quamvis inventi numeri observatis periodis non exacte respondeant ; id quod tum ex minore rationum assumtarum congruentia, tum ex perturbationibus motus planetarum provenit ; satis tamen perspici potest, legem hanc quam proxime in toto systemate planetario observari , ita ut satellites quoque relate ad centrum sui motus , nempe ad primarium planetam , circa quem immediate moventur, eandem sequantur , uti observationes ad calculum reductæ exhibent. Newtonus *hanc regulam Keplerianam his verbis effert : tempora periodica planetarum sunt in ratio-*

ne ſeſquiplicata diſtantiarum eorundem ; & diſtantiæ illorum in ratione ſubſeſquiplicata temporum periodicorum ; cum enim ſit $T^2 : t^2 = D^3 : d^3$; *erit* $T, t = D^{\frac{3}{2}} d^{\frac{3}{2}}$. *porro exponens* $\frac{3}{2}$ *exprimit rationem ſeſquialteram, vel ſeſquiplicatam ; & quia* $T^2 = D^3$; *erit* $D = T^{\frac{2}{3}}$; *ratio vero* $\frac{2}{3}$ *dicitur ſubſeſquiplicata.*

§. CCCVIII.

Propoſitio I. *Omnes Planetæ aguntur vi gravitatis in centrum circa quod moventur, nempe primarii in ſolem, ſecundarii maxime in primarios, eaque vis gravitatis eſt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ab eodem centro.* Oſtenditur I. *Ex motu lunæ.* Newtonus analyſin naturæ & legum generalium gravitatis inchoavit a gravitate lunæ in terram. Sic enim ratiocinatus eſt: omnia corpora tum in ſuperficie terræ poſita, tum prope eandem in terram conſtanter gravitant, ita, ut gravitas in altiſſimis etiam montium iugis exeratur, ac ne minuatur quidem ſenſibiliter ; cur igitur hæc gravitas in maiore diſtantia qualem luna a terra habet, omnino abrumpatur ? vidit tamen vir acutus, quod, ſi luna per vim gravitatis curſum ſuum circa tellurem conficiat, ea gravitas in tam magna diſtantia fortaſſis decreſcat reciproce, ut quadratum diſtantiæ augetur, uti idem in planetis circa ſolem circumvolutis in ellipſi fieret; quapropter indagandum ſibi ſumſit, an vis gravitatis ſic decreſcens par ſit lunæ in ſua orbita continendæ, idque reipſa invenit. Comparetur enim gravitas lunæ in terram cum gravitate corporum in ſuperficie terræ poſitorum, ut horum diſtantia a centro ſit ad diſtantiam lunæ 60 ſemidiametrorum terreſtrium, ut 1 ad 60. Quoniam orbita lunaris perparum abludit a circulo, pro circulari in præſens ſumi poteſt, motusque cenſeri æquabilis. Si luna intra minutum primum deſcribit arcum S a (F. IV. T. V.) effectum gravitatis in terram exprimet lineola S m, nempe ſpatium, quo intra 1′ ad terram accedit. Cum motus ponatur æquabilis, certe arcus deſcripti erunt temporibus proportionales; igitur ut arcus S a reperia-

 tur,

tur, fiat: ut totum tempus periodicum lunæ ad 1'; ita tota peripheria ad arcum uni minuto primo respondentem;

five cum tempus periodicum fit $= 27.\ 7.\ 43'.\ 12. = 39343',\ 2$ erit $39343,\ 2 : 1 = 360^{o} : \frac{360^{o}}{39343,2} = \frac{3600^{o}}{393432}$; Hæc fractio fi redigatur ad minuta fecunda, abibit in hanc: $\frac{3600 \times 3600}{393432} = 32'',\ 966$. Percurret igitur luna minuto *primo* temporis quam proxime $33''$ arcus; quod quidem fpatium exprimitur per arculum S a. quærendus igitur eft finus verfus huius arcus, feu lineola S m. Ex tabulis radius ad finum verfum arcus $33''$ eft, ut 1 00000000000 ad 12798; ponatur hæc ratio $=$ m : n. Sit terræ femidiameter $= 19641762$ pedum. Quoniam diftantia lunæ feu radius orbitæ ex hyp. continet 60 femidiametros, erit hic radius $= 1178505720'$. igitur fiat: ut fe habet m ad n; ita hic radius ad quartum terminum, qui in pedibus exhibebit fpatium, per quod luna vi gravitatis verfus terram urgetur intra minutum primum; idque fubductis rationibus ope logarithmorum reperitur $= 15,\ 081$ pedibus. Quocirca in comperto eft, lunam fingulis minutis primis fpatio $15,\ 081'$ per gravitatem fuam verfus terram accedere. At corpora prope fuperficiem terræ, five una tantum femidiametro a centro terræ diftantia intra minutum fecundum conficiunt $15,\ 067$ ped. Comparentur hi effectus gravitatis inter fe, qui quidem proxime æquales funt. Nempe lunæ conceffum eft minutum primum, five tempus fexagefies maius, quam corpori terreftri ad idem fpatium conficiendum; hinc cum ex theoria gravium fpatia crefcant, ut quadrata temporum, deberet effectus gravitatis in luna, fi ea par effet gravitati in fuperficie terræ, crefcere ut 60^2. Sicut in eadem ratione effectus prope fuperficiem terræ crefcit; quod cum minime fiat neceffe eft, ut vis gravitatis in eadem ratione

tione decrescat, sive ut tanto minor sit in luna, quanto maius est quadratum distantiæ, quam luna a terra habet; *Vis igitur gravitatis lunæ in terram est in ratione inversa duplicata distantiarum a centro terræ.* Sit gravitas corporis in superficie terræ V; gravitas lunæ u; spatium utrinque idem $= 1$; tempus, quo corpus in superficie terræ 15 pedes conficit, sit $T = 1''$. tempus, quo luna idem conficit spatium $= t = 60''$ nempe 1 minut. prim. quoniam ex formula (§. XCV.) $V : u = \frac{S}{T^2} : \frac{s}{t^2}$ erit hoc casu $V : u = 1 : \frac{1}{60^2} = 60^2 : 1$. Viciffim si assumitur lex gravitatis agentis in ratione inversa duplicata distantiarum, facile invenitur, effectum gravitatis lunæ intra minutum primum, & alterius corporis prope superficiem terræ intra minutum secundum esse æqualem; cum enim sit $S = V T^2$, & ex hyp. $V = \frac{1}{D^2}$, intelligendo per D distantiam a centro, in quod tenditur; erit hoc modo $S = \frac{T^2}{D^2}$. Sit spatium, tempus, distantia corporis prope superficiem terræ S, T, D, in luna s, t, d; erit $S : s = \frac{T^2}{D^2} : \frac{t^2}{d^2} = 1 : \frac{60^2}{60^2}$; quæ est ratio æqualitatis; *Si ergo gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ a centro, in quod gravitatur, eadem est lunæ, & corporis cuiuscunque terrestris gravitas, ipsaque adeo luna ad terrestria corpora pertinet.*

Ex tertia regula Kepleriana (§. CCCVII) si plura corpora volvuntur circa idem centrum, cubi distantiarum sunt ut quadrata temporum periodicorum. Si quod corpus terrestre in distantia a centro terræ $= 1$, in qua gravitatem suam retinet, volveretur circa terram, tempus periodicum esset $= 5068''$, uti supra invenimus (§. CCLXXVI. n. IX.) distantia lunæ $= 60$.

 fiat

fiat $1^3 : 60^3 = (5068)^2 :$ ad quadratum temporis periodici lunaris $= 60^3 \times (5068)^2 = 55478787$-$84000$; radix huius numeri proxime est $= 2355402$; quod est tempus periodicum lunæ in minutis secundis,
d h
efficitque 27. 6. 16′. 42″. quod quidem cum tempore ex observationibus cognito valde convenit, quantum fieri in eiusmodi calculis omnino potest, ubi elementa satis adcurata haud sunt. Vicissim etiam demonstravi §. CCLXXIV. quod assumta hac Kepleriana regula vis gravitatis corporum circa idem centrum circulos describentium sit reciproce, ut quadratum distantiæ ab eodem centro.

§. CCCIX.

II. *De Planetis primariis.* Ex lege secunda Kepleri Planetæ primarii circa solem describunt areas temporibus proportionales; Porro omne corpus, quod hac lege arearum suam orbitam describit, urgetur vi centripeta versus ipsum centrum istiusmodi arearum; quæ est propositio inversa corollarii III. §. CCLXVII. summo rigore demonstrata. Hanc vim gravitatis in eadem orbita variari reciproce ut quadratum distantiæ a centro virium, adcurate ostendimus §. CCXC. de motu in ellipsi. Eadem lex gravitatis ex tertia Kepleri lege manifesto ac necessario derivatur; cum enim in diversis ellipsibus diversorum planetarum primariorum, quas circa eundem focum, nempe solem describunt, quadrata temporum periodicorum sint ut cubi distantiarum, vires eorundem in focum necessario ut quadrata distantiarum inverse se habent. Nam areæ A, quæ in diversis ellipsibus cummuni tempusculo describuntur, eo maiores sunt, quo maior est area totalis, & quo brevius est tempus periodicum T. cum igitur areæ totales ellipsium sint uti rectangula ex semiaxibus (§. CCLXXXVIII. n. 2.) erit F. XIII. T. V. $A = \frac{AC \times CB}{T}$: & proinde $8\,A^2 = \frac{8\,AC^2 \times CB^2}{T^2}$. & cum in quovis ellipseos

lipſeos puncto vis centripeta ſeu V ſit $= \frac{1}{PS^2} \times \frac{8 A^2 \times AC}{2 CB^2}$ n. 5. §. CCXC. ſubſtituendo pro $8 A^2$ valorem æqualem, fiet $V = \frac{1}{PS^2} \times \frac{8 AC^3}{2 T^2}$: Ex hyp. autem quadrata temporum periodicorum ſeu T^2 ſunt ut cubi diſtantiarum mediarum ſeu AC^3; hinc quantitas $\frac{8 AC^3}{2 T^2}$ conſtans eſt, & unitati æquipollet; reſtat igitur $V = \frac{1}{PS^2}$. Viciſſim aſſumta iam lege virium agentium in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ad legem tertiam Keplerianam pervenitur. Sint enim bini planetæ A & B, quorum diſtantiæ mediæ, tempora periodica, vires gravitatis ſint, in A ut D, T, V; in B ut d, t, u. Quoniam ſinguli eodem ſemper tempore ſingulas revolutiones abſolvunt per ſeſe, & præſcindendo a perturbationibus motuum, motus eorundem quoad integram revolutionem non aliter fit, ac ſi in circulo perageretur; hinc concipi poteſt, eodem tempore T, quo planeta percurrit ellipſin, ab alio quodam corpore in diſtantia D deſcribi circulum, & tempore t, quo alter B ellipſin ſuam abſolvit, in diſtantia d pariter deſcribi circulum; erit §. CCLXXII. $V : u = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$. Ex hyp. eſt $V : u = \frac{1}{D^2} : \frac{1}{d^2}$; igitur ob ſimilitudinem rationum $\frac{1}{D^2} : \frac{1}{d^2} = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$: unde prodit $D^3 : d^3 = T^2 : t^2$, quæ eſt ipſiſſima lex Kepleriana, & conſiderata hypotheſi æque binis planetis, ac corporibus aſſumtis convenit.

§. CCCX.

III. *De Satellitibus planetarum primariorum.* De Luna, quæ eſt ſatelles terræ, paullo ante diſſerui. De Jovis autem & Saturni ſatellitibus compertum eſt, easdem illas leges, quas in primariis planetis Keplerus detexerat, ab ipſis quoque ſatellitibus relate ad ſuos primarios obſervari; ac tertia potiſſimum lex manifeſtius in iis ſeſe prodit; nam priores duæ ob ingentem diſtantiam orbitarum, quæ perquam exiguæ nobis adparent, minus adcurate explorari poſſunt, cum focorum diſtantia, & diſcrimen orbium a forma circulari non ita ſub ſenſus cadit, uti diſtantiarum integrarum, & temporum periodicorum ratio determinari poteſt. Nihil igitur opus eſt ſingulatim demonſtrare, ſatellites eadem gravitatis lege in ſuos primarios urgeri, cum id ex analogia, & ex ipſa lege tertia Kepleriana neceſſario conſequi, indubitatum ſit.

§. CCCXI.

IV. *De cometis.* Conſtat ex obſervatione motus cometarum eos in regionem planetarum, atque adeo infra ipſos planetas deſcendere, ac circa ſolem moveri, ita, ut, ſi obſervationes præſto ſint, eorundem motus perinde ac primariorum planetarum determinari poſſit. Certe Newtonus, poſtquam obſervationes tres a Flamſtædio factas obtinuiſſet, ex legibus vis proiectilis & gravitatis univerſalis complura planetæ loca determinavit, inter quæ, & loca ex obſervationibus cognita exiguum prorſus diſcrimen repertum eſt. Idem ab aliis aſtronomis ſucceſſu admodum felici ſæpius iam præſtitum eſt. Nequit etiam in dubium revocari, cometas peracta revolutione, iterum reverti, adeoque in lineis curvis in ſe ipſas redeuntibus moveri. Eodem ergo effectu dato, qui in planetis aliis obſervatur, eandem adſignari cauſſam neceſſe eſt; effectuum enim eiusdem generis eædem ſunt cauſſæ. Sed quod maxime ad hunc locum pertinet, ductis ex ſole tanquam centro virium in cometas radiis vectoribus deprehenſum eſt, radi-

um

um vectorem eorundem describere areas temporibus proportionales; quod manifesto indicio est, eos vi gravitatis in solem agi, uti alii planetæ aguntur. Sed de cometis adcuratius tractabo alio loco.

§. CCCXII.

Declarantur Quædam Dubia.

I. *Inito calculo non reperitur exacta ratio quadrati distantiarum in effectu gravitatis terrestris & lunaris; igitur deductio gravitatis ex motu lunæ sat firma, & adcurata non est.* R. Ratio gravitatis & distantiarum ex illo calculo exacta reperiri non potest; nec sane opus est ad rem præsentem; neque enim elementa calculi adcuratissima sunt; nam luna reipsa non in circulo sed in ellipsi movetur, eiusque a terra distantia, uti in calculo sumebatur, non penitus respondet eius distantiæ veræ; præterea plures aliæ correctiones neglectæ sunt, uti quod motus lunæ actione solis perturbetur. Hæc igitur diligenter considerare debuissent non nulli, qui Newtonum carpunt idcirco, quod non adcuratissimam inveniant rationem quadrati distantiarum in effectu gravitatis lunæ, & corporum terrestrium. Lex tamen gravitatis ex inventa propinqua ratione, & consensu innumerabilium phœnomenorum satis inde deduci potest.

II. *Intelligi non potest, cur, si areæ sint temporibus proportionales propterea vis gravitatis variari debeat reciproce ut quadratum distantiæ a centro virium; nulla enim inter areas, & hanc gravitatis legem connexio deprehenditur.* R. Si de eodem corpore in ellipsi incedente agitur, spectanda quoque est variatio distantiarum eiusdem a centro virium; ea vero oritur vel ex angulo virium componentium, vel ex ratione celeritatis proiectilis aut tangentialis ad vim centripetam, vel ex utraque pendet, uti supra indicatum est. Si igitur distantia planetæ a suo centro est variabilis, & areæ sint temporibus proportionales, necesse est ut in minore distantia describatur arcus maior, & in maiore arcus minor, quia æquales areæ triangulares rationem reciprocam

cam baſium, & altitudinum habent. Porro ſi eadem eſt arcuum curvatura, uti e. g. in aphelio, & perihelio, & ſi præterea arcus æquali tempore deſcripti ſunt inæquales, opus eſt, ut, ubi arcus maior deſcribitur, ceu in perihelio, vis gravitatis pariter maior ſit; quia alterum extremum talis arcus magis a tangente recedit, proindeque vis maior requiritur, ut eodem tempore ad orbitam detorqueatur planeta, quam ſi arcus deſcriptus minor foret. Ex his quidem generatim intelligitur, cur gravitas variari debeat, ſi diſtantia planetæ a centro varietur, & tamen areæ temporibus proportionales ſint. Ut vero lex huius variationis perſpicue exponatur, ſit minima diſtantia planetæ dimidia maximæ; ac tum is in minima diſtantia duplam celeritatem habebit illius, quæ datur in diſtantia maxima ob æqualitatem arearum, ac baſium, & altitudinum rationem reciprocam. Igitur in minima diſtantia intra 1″ percurretur arcus æqualis illi, qui in diſtantia maxima intra 2″ conficitur, & tantundem planeta in priore caſu intra 1″ deflectet a tangente, quantum in poſteriore deflecteret intra 2″. Quare cum ex theoria virium acceleratricium (§. XCV.) ſit $V = \frac{S}{T^2}$; ſi ſpatium, quo a tangente receditur, utrinque ponatur æquale, erit $V = \frac{1}{T^2}$, hoc eſt, in hypotheſi, quod ratio minimæ & maximæ diſtantiæ ſit $1:2$, ratio virium erit $1:\frac{1}{4} = 4:1$; eodemque modo, ſi ratio diſtantiarum ſit $1:3$, ratio virium erit $9:1$; cumque id de quavis multipla, vel ſubmultipla ratione diſtantiarum pateat eodem modo, erit gravitas in hypotheſi arearum temporibus proportionalium, & diſtantiæ variabilis reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro virium.

III. *Inter legem Kepleri tertiam, & gravitatis legem Newtonianam mutua connexio eſt, ita, ut altera ex altera conſequatur* (§. CCCIX.) *at vero is nexus qualis ſit, & unde proveniat, ægre perſpici poteſt.* R. Is nexus tum ex inæquali in diverſis orbibus celeritate, ac proin-

proinde etiam inæquali tempore periodico, tum ex magnitudine, flexu, & curvatura eorundem orbium pendet. Quem in finem nota *primo* : ea regula Kepleri perinde obtinet, sive planetæ in ellipsibus, sive diversis circulis moveantur, siquidem idem habeant centrum virium; semperque concipi potest, dum quidam planeta orbitam ellipticam vertit, alium eodem tempore motu æquabili describere circulum. *Secundo* si ratio distantiarum in binis planetis sit 1:4 seu D:d, erit celeritas vicinioris ad celeritatem remotioris, ut 2:1 = $\frac{1}{\sqrt{D}} : \frac{1}{\sqrt{d}}$ Nempe in ratione reciproca subduplicata distantiarum a centro virium (CCLXXV.) Hisce positis nexus inter Kepleri legem tertiam, & legem gravitatis Newtoni intelligi quodam modo potest; nam tempora periodica pendent a celeritate motus & spatio percurrendo seu magnitudine orbium, qui sunt uti distantiæ a centro virium ac circuli; cum magnitudine autem diversa pariter diversa earundem curvatura connexa est, cui respondere debet vis gravitatis diversa. In posito casu distantiarum ac celeritatum, in primis gravitas planetæ vicinioris in centrum quadrupla esse debet gravitatis, quæ est in remotiore, quia vires spectatis solis celeritatibus crescunt ut quadrata earundem, quod distincte exposui (§. CCLXXVI. n. III.) deinde quia radius minoris orbitæ quater contineri ponitur in radio remotioris, necesse est, ut in minore orbita curvatura, & declinatio a tangente sit quadruplo maior, quam in remotiore, ut proinde hoc etiam ex capite gravitas planetæ vicinioris in centrum quadrupla esse debeat gravitatis illius, quæ est in remotiore; quando igitur inæqualis celeritas, & inæqualis curvatura orbitæ coniunctim spectantur (cum his autem tempora periodica, ac distantiæ necessario connexa sunt) haud ægre intelligitur, gravitatem vicinioris decies sexies maiorem esse gravitate remotioris, in hypothesi, qua ratio distantiarum est 1:4; eodemque modo de quavis multipla, vel submultipla distantiarum ratione demonstratur, gravitatem posita Kepleriana lege tertia variari reciproce ut quadratum distantiæ a centro virium. Vicissim posita

ſita hac lege gravitatis, Kepleriana lex eruitur. Nam tempus periodicum in motu circulari æquabili pendet a celeritate, & ſpatio ſeu peripheria percurrenda, quæ eſt ut radius ſeu diſtantia a centro virium. Hinc ſi celeritas vicinioris & remotioris corporis par foret, planetæ remotioris tempus periodicum tantum creſceret, quanto maior eſt eius a centro virium diſtantia ſecundum formulam $T = S = D$. Quia vero aſſumta ea lege gravitatis celeritates ſunt reciproce, ut radices diſtantiarum; hinc ſi planeta remotior quadruplo magis diſtet, erit celeritas eius duplo minor, quam in viciniore; cum igitur ſpatium percurrendum ſit directe ut diſtantia, & celeritas reciproce ut diſtantiæ radix, neceſſario ſequitur ea temporum ac diſtantiarum ratio, quam tertia Kepleri lex exprimit. Omnem obſcuritatem tollent formulæ; $T = \frac{S}{C}$, & $S = D$, $C = \frac{1}{\sqrt{D}}$; igitur $T = D\sqrt{D} = \sqrt{D^3}$.

CAPUT III.

De Legibus Attractionis Univerſalis.

Ex Analytica inveſtigatione gravitatis illud iam conſequimur, ut eiusdem leges quædam non ex mera hypotheſi conficta, ſed ex phænomenis naturæ collecta ſtabiliri queant; etſi eædem ex conſenſu aliorum phænomenorum, quæ deinceps examinanda ſunt, mirum in modum commendentur, ac firmentur. Adpellatur autem hæc attractio univerſalis, *quia ad univerſum mundi ſyſtema, eiusque harmoniam & ordinem conſervandum pertinet; ſunt enim pro varia elementorum coniugatione aliæ attractiones particulares, aliæque earum leges, quas phænomena particularium corporum, ſi recta methodo examinantur, paſſim exhibent, uti in Phyſica particulari palam fiet.*

§. CCCXIII.

Definitio. *Attractio* ſecundum ideam illam, quam phœnomena naturæ nobis ingerunt, eſt determinatio, quam

quam singula puncta corporum acquirunt accedendi certa lege velocitatis ad aliud punctum, seu ad aliam massam, quæ instar centri consideratur. Sic dicimus esse attractionem solis in planetas, quatenus singula elementa vel puncta planetarum acquirunt determinationem accedendi certa velocitatis lege, quam mox declarabimus, ad solem, qui est centrum eiusmodi accessus, vel determinationis ad accessum. Attractioni solis in planetas respondet *gravitas* planetarum in solem, uti attractioni terræ in lapidem, aliudve terrestre corpus respondet gravitas lapidis in terram; quamquam attractionis, & gravitatis vocabula passim, uti fit, confundantur; quod dissimulari potest, modo ne deceptrices ideas, & a toto attractionis systemate aberrantes quisquam inde concipiat. & gravitatem, seu gravitationem, non nisi per tendentiam ad centrum, quod fortassis non nisi imaginarium est, sibi repræsentet, nulla distantiæ, nulla massæ, in quam tenditur, habita ratione. Duplex est modus, quo hæc attractio, & gravitas concipi & explicari solet. Dum enim e. g. luna gravitat in terram, vel attrahitur a terra, atque idcirco ad terram accedit, ratio huius accessus vel inhæret in ipso corpore seu luna accedente, vel inest in corpore, ad quod acceditur, nempe in ipsa terra. Hoc posteriore sensu attractio vim vocabuli proprie retinet; quia quævis molecula aut quodvis punctum materiæ instar centri consideratur, quod per amplissimam suæ activitatis sphæram in omnes alias moleculas intra eandem contentas certa lege agat attrahendo, seu impellendo easdem versus se, atque ista concipiendi ratione facile intelligitur, eo maiorem fore hanc in alias moleculas actionem, quo maior est molecularum, aut punctorum in centro existentium numerus; nam quodvis punctum centrale in aliud quodvis per sphæram suam dispersum agit; ex collectione igitur plurium punctorum agentium, seu attrahentium maior fit actio, seu attractio; crescet igitur hæc vis directe ut massa attrahens, sive ut massa, in quam tenditur, quemadmodum reipsa in toto systemate planetario ista lex obtinet. Huic conceptui respondent verba Caillii in animadversionibus ad systema physicum Astronomiæ: „ *Omnia phænomena motus corporum vel*

„ invi-

§. CCCXIV.

Lex I. Attractionis: *Attractio Corporum seu materiæ est universalis, mutua, omnibusque corporibus, & corporum elementis communis.* Ostend. 1. Partes planetæ cuiusdam secundarii, ceu satellitis Iovis, aut Saturni, gravitant in suam sphæram, quam constituunt; haud secus ac lapides gravitant in sphæram telluris; secus enim non intelligitur, quomodo in sua sphæra perpetuo maneant, aut figuram globosam conservent; at eædem partes, quæ in planetam suum primarium gravitant, simul gravitant in solem; est enim hæc proprietas absoluta, quæ non ex combinatione materiæ oritur, sed ipsis elementis competit. Similiter de Luna differendum, quæ gravitat in terram, sive attrahitur a terra; cum vicissim terra gravitet in lunam, uti ex maris æstu comprobabimus: uti vero motus planetarum circa solem eorundem in solem gravitatem aperte prodit: ita perturbationes motuum cælestium, de quibus proxime agemus, planetas non modo in solem, sed in se mutuo gravitare ostendunt; atque eiusmodi perturbationes, quarum in quovis alio systemate ratio reddi nulla potest, cum lege gravitatis mutuæ & universalis adeo consentiunt, ut, quod spectatis caussis generalibus, ac principiis physicis turbatio motus videretur, id anomaliis ex attractione mutua necessario provenientibus in primis serviat explicandis. Denique cum hæc mutua gravitas in tam multis corporibus tam longe, lateque a se invicem disiunctis obtineat, analogiæ naturæ & rectæ philosophandi methodo maxime consentaneum est; ut ea pro generali materiæ proprietate assumatur; unde per sese liquet, eandem esse mutuam.

Vis igitur gravitatis, quam homines imperiti solius terræ propriam iudicant, ad omnia planetarii saltem systematis corpora transferenda est; nec ea instar nisus accedendi ad punctum terræ imaginarium, nempe centrum, concipi debet, sed instar nisus partium singularum accedendi ad se mutuo; etsi dein demonstrabimus, punctum in sphæram mole diffusam, eiusque singulas partes non ali-

ter gravitare, ac si omnes sphæræ partes in centro essent collectæ.

§. CCCXV.

Lex II. *Vis acceleratrix gravitatis paribus distantiis est proportionalis massæ attrahenti, seu massæ, in quam tenditur.* Utrovis enim ex binis conceptibus supra in definitione explicatis utare, necessario ad hanc legem pervenies; quam maxime consensus phœnomenorum & harmonia totius systematis solaris confirmat; planetæ enim, & cometæ magis in solem, quam alios planetas gravitant, propterea quod ob maiorem massam maiore vi attrahendi sol polleat. Indidem ex hac lege pendent variationes gravitatis terrestris in diversis terræ locis. Quapropter ut motus cælestium corporum, qui gravitate eorundem in solem peraguntur, recte explicari possint, massa solis in primis ad calculum revocanda est; ac si perturbationes motuum incidunt, pariter massa corporis motum perturbantis expendenda est. Etsi enim attractio & gravitatio sit universalis, ac mutua; tamen illuc potissimum tendent corpora, quorsum a massa quapiam maiore, & cæteris prævalente trahuntur. Plumula iuxta turrim decidens non adhæreſcit muro, etsi a muro attrahatur, sed in terram, nisi quid obstat, labitur, quia massa telluris, a qua trahitur, si cum muro comparetur, sine comparatione maior est; intellecta igitur hac lege, pronum est multa solvere, quæ Newtonianis obiiciuntur a nonnullis seu ex imperitia, seu cavillandi gratia. Est aliud præterea consectarium hoc loco adnectendum; Cum *singula puncta* corporis terrestris ceu lapidis, a *tota massa telluris* attrahantur, vis acceleratrix, paribus distantiis, in singulis punctis, proinde etiam in omnibus corporibus eadem est; hinc ubi medium nullum resistit, quævis corpora æquali celeritate, & ex æquali altitudine æquali tempore decidunt; nam celeritas pendet ex attractionis quantitate; hæc vero in æquali (absolute, vel quam proxime) distantia ab eadem massa attrahente æqualis est; consequenter sollicitatio ad motum, seu vis acceleratrix in singulis punctis est eadem, & pari celeritate movebitur unica auri particula, qua centum particu-

la-

larum millia ; & leviſſima pluma non minore celeritate, quam nummus aureus ; uti noviſſimum in vacuo Boyleano experimentum oſtendit (§. XVIII.)

§. CCCXVI.

Lex III. *Gravitatis vis motrix eſt ut vis acceleratrix ducta in quantitatem materiæ , ſeu in maſſam , quæ in aliquod centrum tendit.* Nam ſingula puncta maſſam gravem conſtituentia trahuntur æqualiter ; igitur gravitas totius maſſæ , quæ *pondus* dicitur , æqualis eſt ſummæ gravitatis minimorum punctorum , hoc eſt , vi acceleratrici , quæ in ſingulis punctis eadem eſt , ductæ in numerum punctorum ſeu in maſſam , quæ attrahitur , vel in centrum tendit. Si maſſa attrahens , ac proinde etiam vis acceleratrix conſtans , uti proxime fit reſpectu corporum terreſtrium in eodem terræ tractu , corporum pondera ſunt proportionalia quantitati materiæ , ſeu denſitati , quam habent. Cum vero non ſciamus ullius corporis partium minimarum numerum , nec ullum reperiatur abſolute denſum , ſeu poris , & vacuo carens , quocum cætera ſub eodem volumine comparari poſſint ; hinc nequit abſolute adſirmari , quantum materiæ in ullo corpore contineatur , ſed duntaxat *reſpective* , id eſt , comparando inter ſe bina eiusdem magnitudinis , & voluminis. Atque hinc orta eſt diviſio in corpora ſpecifice graviora , aut leviora , quatenus , ſi ſub eodem volumine inter ſe comparentur , alterum altero gravius eſt, ſeu præponderat ; de qua re tractavimus alio iam loco.

§. CCCXVII.

Lex IV.* *Vis acceleratrix gravitatis corporum eſt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a centro maſſæ attrahentis.* Satis hanc legem demonſtravimus toto capite præcedente.

Sumſimus adhuc , punctum quoddam aut corpus ab alio attrahi ita , ac ſi & maſſæ attrahentis , & attractæ puncta omnia in centris eſſent collecta , ſingulæ maſſæ in ſingulis. Nec id aliter reipſa ſe habet. At enim hoc peculiari demonſtratione eget ; ſi enim maſſæ diffuſæ in mo-

 lem

lem maiorem sumantur, qualis est Solis, ac Jovis massa, imo omnium corporum totalium, puncta propiora trahunt, & trahuntur magis, quam si in centro massæ sphæricæ essent posita, & remotiora minus; quæ sunt ad latera, trahunt oblique, ut proin earum directio ad mediam sit reducenda; Nec sufficit dicere, si omnia sphæræ puncta in centrum confluant, tantundem augeri propiorum punctorum distantiam, quantum distantia remotiorum inde minuitur; valet hæc quidem demonstratio ex theoria centri gravitatis desumta, si vires sint in ratione simplice distantiarum; at siquis idem ad hypothesin virium in ratione inversâ duplicata distantiarum agentium transferre velit, sine dubio in paralogismum imprudens incidet. Quapropter alia methodus exhibenda est computandi vim, qua massa molem occupans tendit in massam itidem diffusam per molem aliquam; ut colligatur summa virium inæqualium ex singulis punctis massæ utriusque reductarum ad directionem eandem. Etsi autem hæc demonstratio maioris esse moliminis videatur; tamen ea prætermitti non debet, cum primarium quendam articulum theoriæ Newtonianæ contineat.

§. CCCXVIII.

Propositio. *Si ad sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione a punctis: dico, quod corpusculum vel punctum extra sphæricam superficiem constitutum attrahatur ad centrum sphæræ vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.* Sint (F. VII, & VIII. T VI.) A H K B, a h k b æquales duæ superficies sphæricæ, centris S, s, diametris A B, a b descriptæ, & P, p puncta seu corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a punctis lineæ P H K, p h k; tum aliæ prioribus infinite propinquæ P I L, p i l, auferentes a circulis maximis A H B, a h b æquales arcus H K, h k, & I L, i l; & ad eas demittantur perpendicula S D, s d; S E, s e; I R, i r, quorum S D, s d secent P L, p l in F & f. Demittantur etiam ad diametros perpendicula I Q, i q. Evanescentibus angulis D P E, d p e coincident puncta F, & E, f & e, eritque $PE = PF$; $pe = pf$; præterea est $DF = df$, cum

sint

ſint differentiæ æqualium D S & s d , S E, & se. His ita conſtitutis

1. ob R I , D F, r i, d f parallelas , erit

$$\frac{\begin{array}{c} PI : PF = RI : DF \\ pf : pi = df \text{ vel } DF : ri \end{array}}{}$$

compoſitis rationibus $PI \times pf : PF \times pi = RI : ri = IH : ih$; nam triangula R H I, r h i ſimilia ſunt ob angulos ad R & r ex conſtr. rectos , & æquales angulos ad H, & h per chordas æquales H K , & h k & arcus minimos I H, i h , qui pro tangentibus in H & h uſurpari poſſunt, interceptos; hinc erit R I ad r i , ut arcus I H ad arcum i h.

2. Triangula P Q I , P E S ob angulos ad Q & E rectos , & in P communem ſimilia ſunt; pariter triangula p q i, p e s ſimilia.

igitur $PI : PS = IQ : SE$

$ps : pi = se \text{ vel } SE : iq$

conſequenter $PI \times ps : PS \times pi = IQ : iq$

compoſita hac & ſuperiore ratione fiet

$$PI^2 \times pf \times ps : pi^2 \times PF \times PS = IH \times IQ : ih \times iq.$$

3. Factum $IH \times IQ$ exhibet ſuperficiem circularem , quam arcus I H rotatione ſemicirculi A K B circa diametrum A B deſcribit ; hac enim rotatione arcus I H generat annulum circularem ; cuius ſuperficies, cum ſit æqualis ſuperficiei cylindri infinite parvæ altitudinis , erit ut latus I H ductum in peripheriam , per quam rotatur ; eſt autem ea peripheria ut radius I Q ; ſimiliter de facto $ih \times iq$ differendum.

4. Vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt puncta P, & p, ſunt ut ipſæ ſuperficies directe, & ut quadrata diſtantiarum inverſe; rationem ſuperficierum exhibet prima ratio ultimæ analogiæ n. 2.

igitur vires ſunt ut $\frac{PI^2 \times pf \times ps}{PI^2} : \frac{pi^2 \times PF \times PS}{pi^2}$

$= pf \times ps : PF \times PS.$

 5. Quo-

5. Quoniam hæ vires ad obliquas superficierum partes concipiuntur resolutæ, nempe vis PI in PQ & IQ vis pi in pq & iq; vires autem IQ, & iq viribus oppositis TQ, & tq extinguuntur; Hinc ut inveniantur vires PQ, & pq in centra tendentes, fiat ut PI ad PQ, ita vis directione PI, quæ est ut $pf \times ps$ ad quartum terminum, seu ad vim directione PQ; sive quoniam est $PI : PQ = PS : PE = PF$, fiat

$$PS : PF = pf \times ps : \frac{PF \times pf \times ps}{PS}$$

ac similiter $ps : pf = PF \times PS : \frac{PF \times PS \times pf}{ps}$

Erunt igitur vires in centra tendentes, ut

$$\frac{PF \times pf \times ps}{PS} : \frac{PF \times PS \times pf}{ps} = \frac{ps}{PS} : \frac{PS}{ps} =$$
$ps^2 : PS^2$.

Simili ratione vires omnium superficierum circularium, in quas utraque superficies sphærica distingui potest, ac proinde totarum superficierum in puncta P & p exercitæ semper sunt reciproce ut quadratum distantiæ a centro. Quamobrem sphæra, quæ ex infinitis eiusmodi superficiebus coalescit, si constat materia homogenea, quæ in eadem a centro distantia eandem habeat densitatem, utcunque in diversis distantiis diversa fit densitas, quodvis punctum extra ipsam non aliter attrahet, ac si omnis sphæræ materia esset collecta, & compenetrata in centro eiusdem.

§. CCCXIX.

Corollarium I. Si binæ ponantur sphæræ, quarum puncta se mutuo trahant in ratione reciproca distantiarum, ac in pari a centris distantia circumquaque habeant singulæ eandem densitatem quamvis; etiam altera ab altera ita trahetur, ac si omnis materia in suo utriusque centro compenetrata coiret; quamobrem

rem in hac gravitatis lege globi integri ingentes eandem servant legem, quam particulæ minimæ sive singulæ, nimirum itidem reciprocam duplicatam distantiarum, quod non item in quavis alia lege contingeret. Hinc Maupertuisius censet, hanc perfectissimam esse legem, & ab auctore naturæ debuisse aliis anteponi. At enim contra eiusmodi necessitatem, quam Deo adfingunt, creandi ea, quæ in se ipsis spectata perfectiora nobis videntur, disputavimus in Theologia naturali. Dein cur ista censeatur perfectissima lex, in qua globi eandem habent legem virium, quam puncta, quæque in globis duntaxat, non item in reliquis figuris habet locum? præsertim cum ea non nisi in globis continuis perfectis, & in pari a centro distantia homogeneis obtineatur; quales globi omnium consensu nulli sunt in rerum natura.

§. CCCXX.

Corollarium II. Si bini sint globi *homogenei*; quorum proinde massæ M & m sunt ut volumina, sive in ratione triplicata radiorum D & d, ac in eorum superficiebus collocentur bina puncta; erunt vires V, & u, quibus in globos gravitant, ut radii eorundem globorum. Si enim utriusque materia coiret in centro, remanentibus punctis ubi prius erat superficies, erit $V : u = \frac{M}{D^2} : \frac{m}{d^2} = \frac{D^3}{D^2} : \frac{d^3}{d^2} = D : d$. Idem ad omnes figuras similes solidas extendi potest, in quarum superficie, si capiantur bina puncta homologa, & in iis collocentur bina puncta attracta hac lege virium $V = \frac{1}{D^2}$, erunt vires in singula eiusmodi solida, ut latera eorundem. Nam si utrumque solidum dividatur in eundem numerum particularum perquam exiguarum similium & similiter positarum, erit in singulis massa, ut sunt tota solida, sive in ratione triplicata laterum homologorum, distantia autem binorum punctorum erit in ratione simplici eorundem laterum, ut ex similitudine solidorum perspicuum est; Quapropter ratio

compoſita ex directa ſimplici maſſarum, & reciproca duplicata diſtantiarum, erit æqualis rationi compoſitæ ex triplicata directa, & duplicata reciproca laterum homologorum, hoc eſt, erit ratio ſimplex eorundem laterum. Quapropter ſi fiant duæ ſphæroides ellipticæ ex converſione circa proprios axes homologos binarum ellipſium ſimilium, & collocentur puncta gravitantia in punctis homologis ſuperficierum earundem ſphæroidum, erunt vires compoſitæ, quibus ad medium tendunt, in ratione directa ſimplici diſtantiarum a centro, quia eæ ſphæroides ſunt ſolida ſimilia, proinde maſſæ earundem in ratione triplicata laterum homologorum, & diſtantiæ punctorum homologorum a centro ſunt latera homologa.

§. CCCXXI.

Corollarium III. Dictum eſt ſupra in propoſitione, quod, ſi ex altera parte Diametrorum A B, a b capiantur arcus æquales A T = A I, a t = a i, & arcus T u = I H, t u = i h, vires obliquæ & æquales I Q, & T Q, i q, & t q ſibi mutuo opponantur, nullumque motum in corpuſculo vel puncto p producant; Similis virium oppoſitarum & æqualium extinctio contingit, ſi punctum Z cuius vires ad ſingula ſuperficiei ſphæricæ puncta decreſcunt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ab iisdem, intra ſuperficiem in Z conſtituitur. Nam agantur per Z ad ſuperficiem ſphæricam lineæ duæ c n, o m arcus quam minimos c o, m n, intercipientes; erunt triangula c Z o, m Z n ſimilia; Quia præter angulos ad vertices oppoſitos etiam anguli o c n, n m o eidem arcui o n inſiſtentes æquantur; arcus enim minimi o c, n m inſtar chordarum ſunt; hinc erit c o : m n = o Z : Z n : h. e. arcus c o, m n erunt diſtantiis proportionales; & hinc ſi ad ſuperficiem ſphæricam per punctum Z ductæ intelligantur innumeræ rectæ ad arcus quam minimos c o, m n terminatæ, rectæ illæ figuras ſolidas (pyramides vel conos) ſimiles formabunt; vires autem puncti Z erunt ut baſes earundem directe, & ut quadrata diſtantiarum reciproce, hoc eſt, quia baſes ſunt

in

in ratione duplicata laterum co, mn, vires erunt ut $\frac{co^2}{oZ^2}$ ad $\frac{mn^2}{Zn^2}$ est autem $oZ : Zn = co : mn$, proindeque $oZ^2 : Zn^2 = co^2 : mn^2$ consequenter vires erunt ut $\frac{co^2}{co^2}$ ad $\frac{mn^2}{mn^2}$; Quæ est ratio æqualitatis; & simili argumento attractiones omnes per totam superficiem sphæricam a contrariis actionibus destruentur; proinde punctum vel particula Z nullam in partem his attractationibus impelli potest.

CAPUT IV.

De Motu planetarum expositis legibus in se gravitantium.

Ut motus cœlestium corporum, totaque harmonia systematis planetarii recte explicetur, in primis massæ planetarum ad calculum revocandæ sunt, tum quæ generatim de proiectione massarum in se gravitantium demonstrari solent, ad hunc locum, quorsum unice pertinent, sunt adplicanda.

§. CCCXXII.

Lemma I. *Massæ corporum, circa quas tanquam centrum virium alia corpora volvuntur, sunt in ratione triplicata distantiarum mediarum corporum gyrantium, & reciproca duplicata temporum periodicorum.* Sit enim massa solis, circa quem planetæ primarii volvuntur M, distantia media cuiusdam planetæ D, tempus periodicum T; erit ex legibus attractationis vis gravitatis planetæ in solem seu $V = \frac{M}{D^2}$; & quoniam in quavis orbita elliptica planetarum bina sunt puncta M & N

(F.II. T.VI.) in quibus celeritas ac vis planetæ perinde ſe habet, ac ſi radio $SM = R$ eodem, quo ellipſin, tempore verreret circulum, adhiberi ex theoria virium in circulo poteſt formula $V = \frac{R}{T^2}$ (§. CCLXXII.) erit igitur $\frac{M}{D^2} = \frac{R}{T^2}$, & $M = \frac{RD^2}{T^2}$; cumque radius R & diſtantia media perparum differant, habebitur $M = \frac{D^3}{T^2}$. Hac igitur methodo eorum corporum, circa quæ alia inſtar ſatellitum convertuntur, maſſas habebimus; inventæque ſunt ſequentes earum rationes:

	Solis	Jovis	Saturni	Terræ
Maſſæ	173314	159, 93	32, 87	0, 515.
ſive	1	$\frac{1}{1084}$	$\frac{1}{5272}$	$\frac{1}{336532}$

Cæteri planetæ quoad maſſam in hunc modum circiter æſtimari ſolent, ut Mars ſumatur $\frac{1}{5}$ *telluris, Venus eidem æqualis, Mercurius* $\frac{1}{8}$. *Si maſſæ Jovis, Saturni, ac terræ in ſummam colligantur, erit ea ad maſſam ſolis in minore ratione, quam*, 194 *ad* 173314, *hoc eſt, in minore ratione, quam* 1 *ad* 893. *Quodſi reliquorum planetarum, Martis, Veneris, Mercurii maſſæ ponuntur terræ æquales, ſumma omnium ſex maſſarum ad maſſam ſolis minorem rationem habet, quam* 1 *ad* 889.

§. CCCXXIII.

Lemma II. *Si binæ maſſæ mutuis viribus in ſe agentes ſecundum expoſitam gravitatis legem ad ſe accedant, vires, quibus utraque movetur, æquales ſunt; centrum vero commune gravitatis quieſcit, id eſt, in eodem puncto rectarum centra maſſarum coniungentium manet.* Sint enim (F.IV. T.VI.) binarum maſſarum A & B vires mutuæ V & u; diſtantia communis D; erit vis acceleratrix maſſæ A directe ut maſſa B, in quam tenditur & reciproce ut quadratum diſtantiæ; vis acceleratrix maſ-

ſæ

fæ B ut maffa A, in quam a B tenditur, & reciproce ut quadratum diftantiæ; vis autem motrix habebitur, fi per maffam, quæ in aliam tendit, multiplicetur vis acceleratrix; erit igitur $V : u = \frac{A \times B}{D^2} : \frac{A \times B}{D^2}$; quæ eft ratio æqualitatis. Si folæ vires acceleratrices binarum maffarum in fe mutuo tendentium fpectentur, eæ funt reciproce ut ipfæ maffæ. Ac fi concipiatur corpufculum a tellure noftra feparatum, erit eius gravitas acceleratrix in terram ad mutuam gravitatem acceleratricem terræ in corpufculum, uti eft ipfa terra ad corpufculum illud. Si iam V & u defignent folas vires acceleratrices, quæ in lapfu vel mutuo acceffu corporum maxime fpectantur, erit $V : u = B : A$ ac fi gravitatis centrum earundem maffarum fit in C; unde defumtæ diftantiæ cum maffis reciprocant, erit $V : u = B : A = AC : CB$, hoc eft vires mutuæ funt, uti diftantiæ a centro gravitatis, & fpatiola A E, B e, quibus ad fefe accedunt intra æquale tempufculum, uti vires acceleratrices, five itidem ut diftantiæ a centro gravitatis; quapropter etiam fpatia refidua E C, C e erunt ut diftantiæ A C, C B, five in ratione maffarum reciproca; hinc commune centrum gravitatis in eodem puncto C quiefcit.

§. CCCXXIV.

Corollarium. Hoc igitur modo centrum gravitatis inter maffas mutuis viribus in fe tendentes communi methodo reperiri poteft, quia & diftantiæ a centro gravitatis, & celeritates elementares funt in ratione maffarum reciproca; Ac fi omnes planetæ collocentur ex una parte in directum, denturque eorum maffæ, ac diftantiæ a fole, centrum commune gravitatis facile reperitur (§. CXXXI.) Affumatur enim planum per centrum folis tranfiens, ut huius diftantia, & factum ex maffa folis in diftantiam ab affumto plano fit = O. Tum diftantiæ maximæ planetarum a fole, quæ dantur in femidiametris terræ, ducantur in maffas eorundem; fumma factorum dividatur per fummam maffarum; ac obveniet centrum commune gravitatis hinc inter planetas

tas omnes ex una parte, inde inter ſolem. Ac ſi Martis, Veneris, ac Mercurii maſſæ ponantur terreſtri pares, reliquorum maſſæ, uti ſupra indicavimus; diſtantiæ vero in ſemidiametris terræ pro Mercurio = 10272. pro Venere = 16029. pro terra 22370. pro Marte = 36630. pro Jove = 119900. pro Saturno = 122870; erit ſumma factorum ex ſingulis maſſis in ſuas a centro ſolis diſtantias maximas, proxime = 23258273. Summa autem maſſarum omnium proxime = 173509. inde facta diviſione prioris ſummæ per poſteriorem diſtantia centri gravitatis a centro ſolis reperitur = 134. 04; ac ſi radius ſolis 50 contineat ſemidiametros terræ, centrum gravitatis a ſuperficie ſolis aberit 84, 04 ſemidiametris terræ, hoc eſt proxime $\frac{5}{6}$ partibus diametri ſolaris.

§. CCCXXV.

Lemma III. *Si duæ maſſæ viribus mutuis in ſe tendentes proiiciantur in plagas oppoſitas A F, B f directionibus parallelis & velocitatibus maſſarum reciprocis, commune centrum gravitatis quieſcit.* F. IV. T. VI. Nam cum ex hyp. ſit AF : Bf = B : A = AC : CB; & AF ad Bf parallela, triangula AFC, BCf ſunt ſimilia, & FCf una linea recta: porro & FC : Cf = AC : CB; præterea AE : AC = Be : BC (Lemm. præc.) ſeu completis parallelogrammis FD : fd = AC : BC = FC : Cf; hinc & triangula FDC, fCd ſimilia ſunt, & puncta D, C, d in eadem recta. Atqui maſſa A per vires AF, AE coniunctas erit in fine motus in D, & maſſa B in d; itaque centrum gravitatis manebit in C; cum ſit DC : Cd = FC : Cf = AC : CB = B : A.

§. CCCXXVI.

Corollaria. I. Areolæ ACD, BCd ob angulos ad C æquales, & latera proportionalia ſunt ſimiles; id quod de omnibus areolis omnibus tempuſculis confectis ſimiliter patet. Proin curvæ, quas maſſæ hiſce viribus deſcribunt, conſtant ex baſibus minimorum triangulorum ſimilium, & ſimiliter poſitorum; conſequenter & ipſæ ſimiles ſunt. Quamobrem in dicta hypotheſi *maſſæ circa*

circa centrum commune gravitatis immotum curvas similes eodem tempore describunt. II. Cum sit $AC : CB = DC : dC$; erit etiam $AC + CB\ (AB)\ DC + Cd\ (Dd) = AC : DC$, & $AB^2 : Dd^2 = AC^2 : DC^2$. Quapropter *si vires, quibus eiusmodi corpora in se mutuo agunt, etiam mutatis distantiis sint in ratione reciproca duplicata distantiarum a se, $Dd^2 : AB^2$; erunt quoque in ratione reciproca duplicata distantiarum a centro gravitatis $DC^2 : AC^2$.* III. *Quare si duo corpora proiiciantur directionibus parallelis, & oppositis, celeritatibus massarum reciprocis, quæque minores sint, quam quæ descensu in commune centrum gravitatis C acquiri possint, & si præterea ea corpora viribus mutuis agentibus in ratione reciproca distantiarum a se (vel quod perinde est, a centro gravitatis) sollicitentur, describent circa centrum gravitatis ellipses similes.* Removeamus animo & cogitatione ex systemate planetario omnes reliquos planetas, soli telluri, ac lunæ retentæ istiusmodi vires mutuas dicta lege agentes (quæ ipsis revera competunt) ac vim proiectionis ea celeritate, ac directione, quam supra posuimus, tribuamus; ac perspicuum erit, quomodo terra ceu planeta primarius cum suo satellite motum in ellipsi peragat, ac in spatiis cælestibus omni impedimento sensibili vacuis semper continuare debeat. Similiter de quovis alio planeta primario cum uno pluribusve satellitibus differendum est. Ut porro intelligatur, quomodo eiusmodi corporum circa centrum commune gravitatis suas orbitas describentium systemata moveantur circa tertiam quandam massam, ceu terra cum suo satellite, seu luna, Jupiter cum lunis quatuor, Saturnus cum quinque lunulis reipsa movetur circa solem, præmitti oportet

§. CCCXXVII.

Lemma IV. *Si binæ massæ mutuis viribus in se agentes dicta lege, proiiciantur velocitatibus, quæ nec congruant cum directione virium, nec sint parallelæ & æquales ad easdem partes, eæ simul describent curvas similes, simul coniunctim una cum communi centro gravitatis progredientur via recta æquabiliter.* Dem. Fiat proiectio

(F. V.

(F. V. T. VI.) fecundum A F , B f ; iungantur maffarum centra in iis pofitionibus, quas vi proiectili obtinerent initio & fine primi tempufculi per rectas A B , F f. Secentur eædem in C & H in ratione reciproca maffarum ; per C ducatur recta D d parallela ad F f ; in qua fumantur partes C D , C d æquales fegmentis H F , & H f , ac ductis F D , D A , item f d , B d refolventur vires A F , B f in duas partes , quarum binæ A G , B g parallelæ , & ad easdem partes æquales funt , nam ex Conftr. F f, & D d funt æquales, & parallelæ ; igitur rectæ F D , f d, quæ easdem iungunt , pariter æquales, & parallelæ erunt , confequenter completis parallelogrammis etiam rectæ A G , B g. His præmiffis patet , vim A F , B f utrinque refolvi *primo* in vires A D , B d , per quas proiectæ maffæ circa commune centrum gravitatis curvas fimiles defcribent , ut ante explicatum eft ; funt enim hæ vires ad partes contrarias , & inter fe parallelæ, ac maffarum reciprocæ ; quia triangula A C D, B C d fimilia funt , cum rectæ C D & C d , rectis H F & H f æquales fint maffarum reciprocæ , quemadmodum rectæ A C , C B. *Secundo* data vis A F , B f refolvetur in vires A G , B g ; quæ , cum fint æquales , & parallelæ ad easdem partes , nihil turbant comparativos maffarum motus , fed totum fyftema una cum centro gravitatis via recta C H provehere debent æquabiliter , uti fi corpora navi impofita certos inter fe motus habeant , fimul omnia coniunctim , five totum eorum fyftema , totaque navis via recta provehi poteft.

§. CCCXXVIII.

Corollarium. Ponatur nunc præter maffas A & B tertia quædam S , eaque admodum vafta & ingens refpectu A & B , & ab his ita remota , ut diftantia reliquarum A B ad illius diftantiam comparata perquam exigua fit. R commune fit centrum gravitatis omnium trium maffarum ; ac habeat maffa S proiectionem directione S h contraria & parallela directioni C H , ad quam fit , ut A + B , ad S ; ut adeo tanto maior fit in maffis A & B celeritas proiectionis , quam in S , quanto maffa S maior eft fumma maffarum A + B. Gyrabit igitur ex

ex iisdem principiis circa R commune centrum gravitatis hinc massa S, inde systema A + B, quod salvo motu comparativo circa C, eodem tempore circa R ita convertetur, ut iam massa A, iam massa B versus S iaceat; Atque hic ipse est casus, qui in rerum natura obtinet, dum partialia systemata ex planeta quodam primario cum secundario uno vel pluribus circa solem volvuntur. Sit enim S sol, B terra, A luna. Fiet omnino, ut eodem tempore, quo terra & luna circa commune centrum gravitatis C volvuntur, simul utraque, sive totum systema earundem circa R sive centrum gravitatis ipsis simul, & soli commune transferatur; quia terra & luna, ipsumque earum centrum C adeo vicina inter se sunt respectu distantiæ C S, ut totum systema earundem pro unico puncto haberi queat; atque idcirco, si debita ponatur celeritas proiectionis, describet hinc S, inde punctum illud, sive earum centrum gravitatis C circa R ellipsin. Hoc quidem modo non tam terra, quam commune centrum gravitatis C terram inter & lunam orbitam suam circa solem describet, & in ecliptica movebitur; is tamen motus telluri tribuitur, a cuius centro haud adeo multum abest centrum gravitatis C. Si enim massa terræ ad massam lunæ ponatur ut 70 ad 1, & distantia lunæ a terra = 60 semidiametris terræ, reperietur methodo §. CCCXXIV, & §. CXXXI. indicata distantia centri gravitatis a centro telluris = 0, 845 semid. ut adeo illud intra superficiem terræ adhuc cadat.

§. CCCXXIX.

Propositio I. *Motus periodicus planetarum circa solem componitur ex vi centripeta agente in ratione inversa duplicata distantiarum a centro solis, & vi proiectili seu tangentiali, qua in quovis puncto orbitæ secundum rectas tangentes abire nituntur.* Dem.

I. Planetis omnibus ac cometis vis gravitatis in solem, ac versus se mutuo dicta lege agentis, uti supra indubitato ostensum est, competit; Si ea vis sola iisdem inesset, ad se mutuo accederent celeritatibus massarum reciprocis, ac in centro communi gravitatis con-

iunge-

iungerentur; nec ea haberemus motuum phœnomena, quæ obſervantur re ipſa. Sol ipſe, ſi omni vi proiectionis careret, uti copernicani ponebant, ita ad planetas accederet, ut ſtatus centri gravitatis communis identidem mutaretur, donec aucta attractione ſolis ob imminutam eius diſtantiam totius ſyſtematis harmonia interiret. Nunc vero ſi cæteris planetis tantiſper ſepoſitis telluri ac ſoli vim proiectionis ineſſe concipiamus, ambo circa commune centrum gravitatis curvas deſcribent, quæ pro varia directione & virium coniugatione etiam in ſe ipſas redire poſſunt. Quoniam vero ob maſſæ ſolaris exceſſum commune gravitatis centrum a centro ſolis non multum diſtat, eadem erunt phœnomena, ac ſi circa ſolem iudicio ſenſuum quieſcentem terra moveretur, ſimiliter de reliquis planetis, cometisque differendum eſt. Si enim terra cum ſua luna, Iupiter & Saturnus cum ſuis ſatellitibus proiiciantur certa lege, ſimul circa commune centrum gravitatis primarium inter & ſecundarium ſuas orbitas deſcribent, ſimul totum ſyſtema vim proiectionis, qua eorum centrum æquabiliter progrediatur, conſervat; ſi igitur ſol hoc ſyſtema attrahat, fieri debet, ut id circa ſolem moveatur, ita ut is motus, qui reipſa centro gravitatis competit, ipſi planetæ primario tribuatur, quia centrum gravitatis in ſyſtemate partiali a centro planetæ primarii non multum diſtat.

II. Quemadmodum ex motu curvilineo circa centrum, quo deſcribuntur areæ temporibus proportionales, recte infertur vis gravitatis in centrum; ita non poteſt non vis tangentialis ex eodem pariter intelligi. Nam (F. III. T. V.) motus per E H, ſi in E agit vis E F, haberi non poteſt, niſi in E pariter ſit vis tangentialis per E G.

III. Conſtat corpora in ſuperficie terræ proiecta in curva deferri, quæ ad parabolam accedit, cum vi duplici urgeantur, altera proiectionis, altera gravitatis; cur planetæ ellipſin potius, quam aliam curvam deſcribant, id non niſi ex ratione, & directione virium componentium pendet; ac oſtendimus ſupra, a gravi terreſtri, ſi debita celeritate proiiceretur, neque reſi-

ſten-

ſtentiam atmoſphæræ ſentiret, circulum circa terram deſcribi poſſe, ac debere; ſimiliter igitur de planetis circa ſolem revolutis cogitandum eſt, cum effectuum ſimilium, atque eiusdem generis ſimiles, atque eædem cauſſæ ſint ſtatuendæ.

Ex his quidem cauſſa phyſica periodici planetarum motus, quem in ſua orbita quisque peragunt, penitus perſpicitur; At iidem præterea motu vertiginis adficiuntur, id eſt, convertuntur æquabiliter, certaque ſinguli celeritate circa axes ſuos; quod quidem in terra, venere, luna, marte, iove atque etiam ſole ex macularum, quæ in eorum ſuperficie notantur, motu colligitur; Saturno, ac Mercurio, in quibus ob nimiam aut diſtantiam, aut viciniam ſolis is motus obſervari nequit, ob analogiam iure tribuitur. Ut igitur cauſſa & natura rotationis, ſeu revolutionis diurnæ circa axem intelligatur, diſpiciendum eſt, quæ impreſſio in ea corpora totalia cum primo creata, atque ad debitas a ſole diſtantias collocata ſunt, fieri debuerit, ut ſimul motu rotationis, ſimul progreſſivo gauderent; qua quidem in re a vi centripeta ſeu gravitate eorum in ſolem primo abſtrahamus animum, ſola relicta vi inertiæ, poſtea gravitatis quoque rationem habituri.

§. CCCXXX.

Propoſitio II. *Siquod punctum globi A* (F.VI.T.VI.) *recipiat quamvis impreſſionem directione K A per centrum non tranſeunte; duplex in globo motus uniformis conſequetur, alter progreſſionis in recta B C b ad directionem K A k parallela; alter rotationis circa axem perpendicularem ad planum circuli maximi D K B c b, quod quidem planum per directionem K A determinatur.* Dem. Quoniam omnes globi particulæ inter ſe cohærent, patet, impreſſionem in punctum A factam in omnes propagari, & omnes directione ad K k parallela impelli debere. Concipiatur iam in plano D K B c b circuli maximi diameter D c ad chordam K k & diametrum B b normalis, & intelligatur ſegmentum totum K D k in centro gravitatis H, uti & ſegmentum K c b k in centro gravitatis G collectum. Habebitur vectis H A G in cu-

ius' puncto a impreſſio facta eſt. Manifeſtum eſt, eo maiorem celeritatem maſſæ H, quam maſſæ G communicari, quo & illa hac minor eſt, & quo minus illa, quam hæc a centro percuſſionis a diſtat. Itaque tempuſculo infiniteſimo deſcribet maſſa H maius ſpatiolum H h, & maſſa G minus G g; quo finito diameter D C c erit translata in E h g c, & globus totus D B c b erit in E I d. Unde patet, & diametrum & globum habuiſſe motum rotationis circa punctum C, ita ut angulus D c E velocitatem illius angularem exprimat. Secus enim diameter E o c maneret ad D C c parallela: centrum globi C abiit in o via C o ad K k parallela. Sequentibus autem tempuſculis ob vim inertiæ, ſi nulla alia accedat vis, idem motus centri globi C permanebit, & maſſa H continuo prævertens alteram G, diametrum D c cum circulo maximo D K B c b, ac integro globo circa centrum C, & axem ad dictum circulum maximum normalem circumagere perget.

§. CCCXXXI.

Corollarium I. *Quanto magis directio K A, ſecundum quam ſit impreſſio, a centro globi diſtat, tanto velocior erit motus rotationis;* nam eo minor erit maſſa H, quam G, & eo minus quoque maſſa H a puncto percuſſionis a, quam G diſtabit, & proinde eo maior erit in maſſis H, & G differentia celeritatum.

Joannes Bernoullius Tom. IV. operum inito calculo reperit, ad celeritatem revolutionis diurnæ in tellure noſtra obtinendam, diſtantiam, quam centrum percuſſionis a habere debuit a telluris centro, eſſe $\frac{1}{150}$ ſemidiametri eiusdem; in Marte eandem diſtantiam eſſe $\frac{1}{418}$ ſemidiametri huius planetæ; in Iove $\frac{7}{19}$ ſemidiametri eiusdem.

§. CCCXXXII.

Corollarium II. Si directio impreſſionis tranſeat per centrum, aut ſi omnes globi moleculæ ſecundum eandem directionem æqualibus viribus impellantur; manifeſtum eſt, nullum rotationis motum ſed progreſſionis durta-

taxat, quo centrum globi uniformiter moveatur, consequi; eo ipso, quod vis tota æqualiter distribuatur per totum vectem, & proin per utrumque hæmisphærium, ut adeo neutrum alterum prævenire possit. Unde intelligitur *primo.* Cum vis centripeta ob maximam distantiam omnes fere globi planetarum partes æque adficiat, per eam motus rotationis haud perturbari, sed duntaxat motus progressionis centri gravitatis in curvilineum mutari potest. *Secundo* ob eandem rationem effectus variationis virium centralium aut aliarum perturbatricium in planetis in eo tantummodo consistet, quod describant traiectorias curvilineas inæqualibus celeritatibus, manente earum revolutione diurna prorsus uniformi. *Tertio* Quoniam quodvis materiæ punctum vi inertiæ motum impressum uniformiter conservat, donec ad mutandam sive celeritatem sive directionem aliunde determinetur; idcirco partes globi motum vertiginis circa axem, quem facta impressione, ipsaque inter se cohærentia primo concipiunt, perpetuo retinebunt, nisi caussa quæpiam ad celeritatis vel directionis mutationem illas determinet.

SECTIO VII.

De Synthetica Deductione Gravitatis Universalis.

Newtoniana methodus philosophandi in eo maxime sita est; ut leges naturæ per observationes, atque experimenta analytice investigentur: tum ex iisdem postea quam inventæ sunt, ceu ex principiis tuto assumtis explicatio aliorum præterea phœnomenorum, quæ cum iisdem legibus connexa videntur, synthetica ratione deducatur. Eam methodum cum adhuc se-

fequi conatus fum , fepofitis plane inutilibus , certe intempeftivis de natura primorum elementorum difputationibus , illud iam hac parte explicandum reftat , quomodo ex legibus attractionis analytice inveftigatis connexa phœnomena pendeant , qualia funt , quæ ad perturbationes motuum cæleftium , ac præcipue lunæ , æftum maris , figuram telluris , ac verum mundi fyftema pertinent. Quarum rerum tractationem recte, ni fallor , *fyntheticam gravitatis univerfalis deductionem* infcripfi.

CAPUT I.

De Perturbationibus motuum cæleftium.

Quoniam planetæ non modo a fole , fed a fe mutuo quoque attrahuntur , eorum motus penitus regulares , & orbitæ fixæ & in eodem conftanter plano effe non poffunt. Quare cauffam habemus minime dubiam motuum irregularium , qui reipfa obfervantur in omnibus , & fingulis , quæ , cum certis legibus adftricta fit, & calculo utut difficili , ac tædii pleno fubiici poffit , fatis fe ipfam commendat ceu genuinam , & minime dubiam. Indicabo autem hoc loco , quæ potiffimum perturbationes , & qua ratione fecundum attractionis leges fieri poffint , ac debeant ; nam calculos tractare nec huius loci eft , nec inftituti.

§. CCCXXXIII.

Obfervatio. Planetæ non intra idem temporis intervallum , quo ad eandem pofitionem refpectu fixarum redeunt , etiam ad eandem pofitionem refpectu aphelii fui , vel apogæi , vel ad eandem pofitionem refpectu nodi afcendentis regrediuntur. Hinc orbitæ eorundem mutationem fubeant ; neceffe eft ; quod quidem ita concipi poteft , & folet , ac fi planeta in eadem quidem orbita motum fuum continuaret , fed ita , ut ipfum orbitæ planum circa focum moveatur , five dein eædem maneant orbitæ dimenfiones five etiam iftæ varientur.

Ex

Ex eo autem orbitæ motu facile intelligitur positionem aphelii, atque etiam nodum, imo & inclinationem ad eclipticam mutari & moveri posse. Unde ex hoc apheliorum, & nodorum motu profluxit discrimen inter tria genera conversionum, quas in planetis astronomi considerant. *Conversio periodica* est ea, qua planeta regreditur ad eandem positionem respectu fixarum; conversio *anomalistica*, qua regreditur ad eandem positionem respectu aphelii, & conversio *synodica*, qua regreditur ad eandem positionem respectu nodi ascendentis. Quamquam in Luna synodicam conversionem communius adpellant eam, qua regreditur ad eandem positionem respectu solis, ut a novilunio ad novilunium. Relate ad motum telluris sive motum adparentem solis, *annus periodicus sive sidereus*, hoc est, tempus, intra quod terra ad eandem positionem respectu fixarum regreditur, est $= 365^{d}.\ 6^{h}.\ 9'.\ 22''$. Hoc anno sidereo maior est annus anomalisticus, & minor annus tropicus. Nam annus anomalisticus sive tempus, quo terra ad eandem apsidem revertitur, reperitur $= 365^{d}.\ 6^{h}.\ 15'.\ 24''$. annus vero tropicus, quo nimirum sol regreditur ad idem punctum Eclipticæ computatum ab initio arietis, ceu ad eundem tropicum, vel æquatorem, proxime censetur $= 365^{d}.\ 5^{h}.\ 48'.\ 54''$. Hinc conversio anomalistica terræ maior est siderea ultra $6'$ temporis: annum vero tropicum superat $26\frac{1}{2}'$.

§. CCCXXXIV.

Problema I. *Exhibere, quomodo actione mutua planetarum apsides eorundem moveri possint, ita, ut conversio anomalistica a periodica sive siderea necessario discrepet.* Resolutio problematis habebitur, quantum ad propositum scopum satis est, si ostendatur, quomodo planetæ cuiusdam circa solem gyrantis vis centripeta aut tangentialis perturbetur actione alterius planetæ pariter

circa solem moti, & quomodo mutatis ac perturbatis iis viribus motus apsidum consequi debeat. Igitur

I. Sit (F. IX. T. VI.) T terra circa solem S mota, P planeta quidam extraneus vim telluris perturbans e. g. Jupiter in eodem cum reliquis plano. Notandum in primis, si & terra & sol a planeta extraneo P vi *aequali* & *parallela* traherentur, nulla motus perturbatio orire-tur, sed duntaxat systema terrae ac solis, sive commune eorum centrum gravitatis versus eum planetam ferretur, terra autem suam orbitam secundum omnes leges imperturbate describeret. Quapropter differentia virium, quibus & terra, & sol trahitur, spectanda est; & si tractiones TP, SP non sunt in eadem linea, nec parallelae, ad resolutionem virium more solito confugiendum est. In proposito casu vis gravitatis TP resolvitur in vim TS, & TG facto parallelogrammo TSPG; unde TG = SP, eidemque opposita, vis autem TS gravitatem telluris versus solem auget, eiusque motum necessario perturbat. Et quoniam perturbatio fieri nequit, nisi vis centripeta, aut tangentialis, vel utraque mutetur; hinc etiam vis TG ita resolvenda est, ut una componentium radio vectori, altera vero tangenti arcus circularis, quem tellus minimo tempusculo describere concipitur, respondeat. Producto igitur radio ST indefinite, & in illum demisso ex G perpendiculo GH, erit completo parallelogrammo GHTK, vis TG resoluta in duas, quarum una TH immutat vim telluris centripetam, altera TK adficit tangentialem. Ex quibus luculento patet, quomodo actione planetae extranei vis centripeta, & tangentialis alterius planetae perturbari queat. Reliquum est, ut ostendatur, quomodo perturbatis hisce viribus motus apsidum consequatur.

II. Si a planeta extraneo vis centripeta minuitur, vel tangentialis augetur, linea apsidum promovetur versus eam partem, in quam planeta motu proprio tendit: si autem vis centripeta augetur, aut tangentialis minuitur, linea apsidum removetur in partem contrariam. Sit enim (F. X.) planeta in P, ubi vi tangentiali PT, & centripeta PL circa focum suum S arcum infinitesimum PQ a tangente PT nihil differentem

tem percurrit. Ductis radiis P S , P F anguli T P S , t P F æquales erunt , iidemque manere concipi possunt in puncto Q. Verum accedat iam vis perturbatrix, quæ minuat vim centripetam P L , vel augeat vim tangentialem: utroque casu planeta a foco S recedet, crescet radius vector S Q , & fiet e. g. S O ; igitur si orbita manet elliptica , sequi debet focus F cum radio F P in illam partem , in quam nova orbita cadit, ita, ut anguli radiorum cum tangente utrinque æquales maneant. Movebitur ergo cum plano orbitæ linea apsidum A B versus partem , in quam planeta P tendit , & acquiret situm a b. Atque crescente ob vim perturbatricem distantia planetæ a foco etiam tempus conversionis anomalisticæ crescat, necesse est; sunt enim quadrata temporum , ut cubi distantiarum ; unde ulterius sequitur , axem quoque , seu lineam apsidum a b non iam eiusdem magnitudinis esse , sed crescere debere, & orbitam dilatari , quia eadem lex vel maxime distantiam in axe respicit. Contrarium omnino contingit , si vis perturbatrix augeat vim centripetam , aut minuat tangentialem; quo casu vicissim planeta magis accedet ad focum S , e. g. usque ad n : contrahetur ergo orbita, tempus periodi anomalisticæ decurtabitur , & positio lineæ apsidum a β erit in partem contrariam , ut proin planeta citius ad aphelium perveniat. Quodsi vires perturbatrices mutentur per vices, linea apsidum hac, illac nutabit , neque ultra certos limites progredietur , nisi ex una parte vis perturbatrix maior sit, quam ex altera.

§. CCCXXXV.

Problema II. *Exhibere quomodo ob vires perturbatrices nodi alicuius orbitæ in ecliptica directe, vel retrograde moveri possint, ac debeant, id est secundum, vel contra seriem signorum.* Concipiatur, ut antea, ob vires perturbatrices totum planum orbitæ moveri , sintque (F.XI.) duæ planetarum orbitæ A B, C D se intersecantes in N , & Eclipticam E L in M, & P, una sub maiore inclinationis angulo A P L , altera sub minore D M L. Trahat planeta in D inferior alterum su-

periorem vi A q. manifestum est, orbitam A B ita inclinatum iri, ut, dum nodus ex N regreditur in n, simul etiam intersectio eclipticæ P ad eandem partem recedat in p; Quapropter cum planeta ex A versus B secundum seriem signorum concipiatur moveri, intelligi sane potest, *nodos orbitæ, quæ maiorem habet angulum inclinationis ad eclipticam ab omnibus planetis, quorum orbitæ minorem ad eclipticam angulum inclinationis habent, ad motum retrogradum determinari.* At vero si superior planeta A (F. XII.) trahat inferiorem vi D q; iterum patet, nodum N occursurum planetæ A in n; quo fit, ut intersectio orbitæ cum ecliptica præcedat in m, & motus nodi in ea directus fiat, cum respectu orbitæ C D nihilominus retrogradus maneat. Unde patet, *nodos orbitæ, quæ minorem habet inclinationem ad eclipticam, a planetis maioris inclinationis ita moveri, ut in ecliptica directe progrediantur.*

§. CCCXXXVI.

Corollarium. Nodi planetarum, quorum orbitæ ad eclipticam sive orbitam telluris aliter atque aliter inclinatæ sunt, observantur mutari, & quidem ita, ut retrograde sive contra seriem signorum moveantur, nodos Jovis si excipias, qui moventur directe, sive S S S, h. e. secundum seriem signorum. Ac si planetæ eo ordine ponantur, quo orbitarum anguli inclinationis crescunt, primus erit Juppiter, qui minimam habet 1°. 20'. Sequetur Mars 1°. 51'. Saturnus 2°. 31'. Venus 3°. 27'. Mercurius 6°. 59'½. Hinc nodi Jovis ab omnibus planetis, excepta sola terra directe sive in consequentia promoventur præsertim a Saturno, qui eidem & proximus est in coniunctione, & reliquis omnibus maiorem massam habet. Reliquorum nodi ex una parte a Mercurio & Venere pariter directi fiunt, sed cum a cæteris, & maxime a Jove, cuius massa incomparabiliter maior est, hæ vires elidantur, retrogradi fiunt. Similiter concipi potest nodos orbitæ lunaris, quæ ad eclipticam sub angulo 5° inclinata est, actione solis in Ecliptica existentis ad motum retrogradum nempe versus occasum determinari; imo etiam inclinationem ipsius orbitæ perpetuis mutationibus obnoxiam esse.

§. CCCXXXVII.

Corollarium II. Si iam concipiantur quotvis lunæ circa terram revolvi in orbitis ad eclipticam inclinatis, ac lunarum numerus eo usque augeri, ut tandem se contingant, solidumque circa terram annulum efficiant, huius quoque annuli nodi, sive puncta, in quibus eclipticam secat, itidem retrogradi erunt. Quoniam igitur ex observationibus ac dimensionibus figura telluris sphæroidica est, protuberans sub æquatore, circa polos compressa, materiæ portio sub æquatore extans instar annuli est terram ambientis & in plano æquatoris constituti, qui proinde, uti æquator eclipticam in duobus punctis intersecat; hæc igitur intersectionum puncta motu retrogrado feruntur, efficientque, ut terra, antequam integram periodum absolvat, punctum æquinoctiale, quod interea recessit, attingat, eritque tropica telluris conversio brevior, quam periodica. Atque hoc est *præcessio æquinoctiorum*, cuius ratio in solo Newtoniano systemate secundum naturæ leges reddi potest. Sit enim ecliptica (F. XIII.) E C, axis O P, polus P. Æquatoris terrestris planum Æ Q, axis O B, polus B. Si iam nodi ex M in m, & ex N in n regrediantur, necessario sequetur polus axeos ex B in b, ita ut si nodi longissimo annorum intervallo circulum E c conficerent, polus B sive axis æquatoris circa polum eclipticæ P circellum BbD describeret. Hac igitur nodorum terræ regressione versus occasum fit, ut stellæ omnes motu contrario & apparente per circulos eclipticæ parallelos versus ortum progredi videantur, etsi is progressus perquam exiguus sit, & intra annum non nisi ad 50″. 30‴ secundum longitudinem pertingat. Hæc præcessio æquinoctiorum in caussa est, cur Astronomi distinctionem Zodiaci in rationalem, & adparentem adhibeant. *Adparens*, seu quem oculis cernimus, constat 12 signis supra enumeratis, quorum primum est signum arietis, postremum piscium. *Rationalis* autem, quem tantum mente concipimus, eundem locum occupat totus, & totidem signa continet iisdem nominibus designata; sed divisionis initium fit ab ipsa se-

ctione verna, seu puncto æquinoctiali verno. Quare cum id punctum regrediatur in occidentem lentissimo illo motu, omnia astra respectu ipsius progrediuntur in orientem, & iam per bis mille annos, ex quo nomina sunt imposita, ita processerunt, ut aries adparens sit in tauro rationali, taurus in geminis, gemini in cancro atque ita porro, piscibus occupantibus priscam arietis sedem.

§. CCCXXXVIII.

Corollarium III. Quoniam planum æquatoris terrestris non modo ad planum eclipticæ, in quo sol existit, sed etiam ad planum orbitæ lunaris inclinatum est; idcirco præcessio æquinoctiorum tum actioni solis, tum etiam, ac multo magis actioni lunæ (ob minorem eius a terra distantiam, adeoque maiorem vim) tribuenda est. Cum igitur planum orbitæ ob motum nodorum perpetuo mutetur, adeoque actio lunæ in sphæroidem terrestrem in uno casu notabiliter maior, in alio minor sit; fieri non potest, quin in ipso axe terrestri libratio sive *nutatio* quædam oriatur; ob quam in positione fixarum variationes quædam contingant, quæ reipsa observatæ sunt, ita, ut periodus illarum annorum circiter 18 & 7 mensium spatio concludatur, quantum est tempus unius revolutionis nodorum lunarium.

CAPUT II.

De præcipuis perturbationibus motus lunaris.

Si luna a terra duntaxat attraheretur vi $= \frac{1}{D^2}$, *orbitam regularem circa eandem constanter describeret. At vero assumta lege generali gravitatis universalis, ac mutuæ, quæ a distantia & massa attrahente pendet, fieri non potest, quin eius motus varie per-*

tur-

turbetur, quia non modo a terra, sed a sole quoque attrahitur, ita, ut solis in lunam actio secundum attractionis leges perquam sensibilis fiat, propterea quod & massa solis admodum ingens sit, & distantia lunæ a sole non multo maior, imo aliquando etiam minor, quam distantia terræ ab eodem. Si dein terra & luna, dum circa commune centrum gravitatis moventur in sua orbita, a sole constanter urgerentur viribus æqualibus, & parallelis, motus earum respectivi nil turbarentur omnino: posita vero inæqualitate virium, & obliquitate directionum perturbationes existant, necesse est, quarum præcipuas, hoc loco indicabimus.

§. CCCXXXIX.

Problema. *Datis distantiis terræ ac lunæ a sole, exhibere vires, quibus sol motum lunæ perturbat.* Resolutio. F. XIV T. VI Sit S sol; T terra; L vel l luna in orbita FHEK; Sit HTK arcus orbitæ telluris, cui recta SL producta occurrat in C, & S l in c. Quoniam mensis lunaris a novilunio numeratur, erit id in F, ubi luna & sol in coniunctione sunt respectu terræ T, & facies lunæ a sole illuminata ipsi soli, non telluri obvertitur. Inde emenso primo quadrante erit in H quadratura; in E oppositio cum sole relate ad terram intermediam in T; denique in K quadratura altera. Coniunctio & oppositio *Syzygiæ* vocari solent. Ut igitur vis perturbatrix motus lunaris intelligatur, sit *primo* luna in arcus citerioris puncto quodam L. Secundum leges attractionis gravitas terræ in solem est ad gravitatem lunæ, ut $LS^2 : TS^2$ vel CS^2. Ponatur hæc ratio $= SC : SB$, ut SC seu ST exprimat gravitatem terræ in solem, SB gravitatem lunæ. Ducta BA parallela ad LT, productaque ST in A, ac completo parallelogrammo ABMS, vis obliqua lunæ BS resolvitur in vim BA, & BM seu $AS = AT + TS$. vis TS, cum telluri æque ac lunæ communis sit, nil turbat motum ac statum comparativum horum corporum; relinquitur ergo vis perturbatrix BA, & AT; & quoniam hæ vires adplicatæ sunt lunæ in L existenti; vis BA parallela ad LT lunam urget versus T, eiusque in terram gravitatem auget: vis AT in L adplicata lunam a plano HTK & a terra distrahit. *Secundo.* Si luna est in arcus ulterioris quodam puncto

puncto l, erit gravitas terræ ad gravitatem lunæ in solem, ut $lS^2 : TS^2$ seu cS^2. Fiat hæc ratio = cS : bS, ut cS exprimat gravitatem terræ, bS gravitatem lunæ in solem. Vis bS decomponi potest in vim ba, & aS. Vis ba parallela ad lT lunam in l positam versus terram urget, eiusque in terram gravitatem iterum auget. Vis aS est = TS — Ta. est autem vis TS telluri communis, ac parallela; remanet igitur vis aT negative sumenda, quæ lunam in l positam contraria directione a sole distrahit; perinde est enim, sive luna habeat solam vim aS versus solem, sive habeat vim TS, uti tellus, sed ita, ut lunæ in l positæ addatur vis aT augmento addito contraria. Hæc igitur vis aT lunam etiam in arcu ulteriore HEK a plano HTK & a terra distrahit, & quidem in syzygiis F & E eam directe a centro telluris urget. Hactenus vires perturbatrices obtinuimus in arcu citeriore BA, & AT, in ulteriore ba & aT. Porro vis AT, & aT lunam a terra distrahens proxime æqualis est 3CL. Nam ob ingentem solis a terra distantiam, & exilitatem anguli LST rectæ BL, & AT proxime parallelæ sunt, & sicut TS, ita & BS pro normali ad HK sumi potest; hinc ABLT est parallelogrammum, & AT = BL = 3CL. quia LC, CD, DB ab æqualitate non discedunt sensibiliter. Quapropter vires perturbatrices sunt BA vel LT, & 3CL. Atque ex his explicatio perturbationum motus lunaris deducitur.

§. CCCXL.

Corollarium I. *Celeritas lunæ in sua orbita a syzygiis ad quadraturas, hoc est, in primo & tertio quadrante minuitur: a quadraturis ad syzygias, hoc est, in secundo & quarto quadrante augetur.* Nam F. XV T. VI in primo & tertio quadrante vis 3CL vel cl lunam a terra distrahens resolvitur in vim CN vel IL (de qua postea dicemus) & vim CI vel NL, ci vel nl, quæ directioni lunæ versus H & K progredienti opponitur, eiusque celeritatem minuit: in secundo & tertio quadrante (F. XVI.) vis CL resoluta

luta in C I vel N L conſpirat cum directione lunæ, adeoque eius motum accelerat.

§. CCCXLI.

Corollarium II. *Gravitas lunæ in terram a ſyzygiis ad quadraturas per aliquod ſpatium minuitur, a quadraturis verſus ſyzygias per aliquod ſpatium augetur.* Vis quidem L T (F. XIV) ſeu B A & b a tam in citeriore, quam ulteriore arcu gravitatem lunæ in terram auget; ſed quoniam altera vis perturbatrix C L etiam reſolviturF. XV in C N, vel I L, quæ vi L T in omnibus quadrantibus oppoſita eſt; hinc vis L T & augmentum gravitatis iterum diminuitur. Quoniam igitur eſt C L ad I L; ut 3 C L ad 3 I L; hoc eſt, ſi vis perturbatrix æquatur 3 C L, vis diminuens gravitatis augmentum L T erit = 3 I L; & ſiquo caſu 3 I L fit = L T, *vires gravitatem lunæ perturbantes* ſeſe elident, eaque integra manebit; id quod inito calculo fit in iis orbitæ punctis, ubi diſtantia a quadraturis eſt = 35°, 16′, & a ſyzygiis = 54°. 44′. Inde vero ab eo puncto verſus ſyzygias decreſcit gravitas lunæ, verſus quadraturas creſcit; nam cum I L ſit ſinus anguli L C I = L T C, qui metitur diſtantias lunæ a quadraturis, creſcet vel decreſcet recta I L ut ſinus diſtantiæ lunæ a quadraturis; is autem ſinus verſus ſyzygias progrediendo creſcit, verſus quadraturas decreſcit; itaque recta I L eodem modo; conſequenter a puncto F & E vis 3 I L ſemper maior erit, quam vis L T per 54°, 44′; in quo puncto erunt æquales; inde per 35°, 16′ utrinque circa quadraturas vis 3 I L minor eſt vi L T. Quamobrem ſpectatis omnibus viribus gravitatem lunæ adficientibus dicendum: *decrementum gravitatis lunæ in terram utrinque a ſyzygiis verſus quadraturas ſe extendit per 54°, 44′: augmentum vero eiusdem utrinque a quadraturis per 35°, 16′. Quatuor autem orbitæ lunaris puncta, in quibus vires gravitatem lunæ perturbantes ſe ſe elidunt, utrinque a ſyzygiis per 54°, 44′ diſtant.*

§.

§. CCCXLII.

Corollarium III. *Decrementum gravitatis lunæ in terram in ſyzygiis proxime duplum eſt incrementi eiusdem in quadraturis.* Nam rectæ L T, C L, C T, in primo & tertio quadrante ſunt ut radius, ſinus, & coſinus anguli C T L, ſeu diſtantiæ lunæ a quadraturis: in ſecundo autem, & ultimo quadrante, ut radius, coſinus, & ſinus eiusdem anguli; Hinc vis L T eſt ad 3 C L, ut radius ad triplum ſinum diſtantiæ a quadraturis, vel ut radius ad triplum coſinum diſtantiæ a ſyzygiis. Porro in quadraturis evaneſcente ſinu ac vi C L manet duntaxat prima vis perturbatrix æqualis radio H T vel T K, quæ gravitatem lunæ in terram auget in ſecundo, & ultimo quadrante: vis 3 C L uti coſinus diſtantiæ a ſyzygiis continenter creſcit, & in ipſis ſyzygiis evaneſcente ſinu fit coſinus æqualis radio ut 3 C L fit = 3 L T; quoniam vero luna ob primam vim perturbatricem urgetur verſus terram vi = L T, erit reſidua vis perturbatrix diſtrahens lunam a terra = 3 L T — L T = 2 L T; unde patet conſectarii veritas.

Hoc augmentum gravitatis lunæ in terram, quale ex actione ſolis in quadraturis oritur, ſecundum Newtonum æquale eſt $\frac{1}{178}$ *illius vis, qua luna a terra attrahitur. Præterea animadvertendum: ſi decrementum gravitatis in ſyzygiis ad calculum diligenter revocetur, vis perturbatrix in coniunctione paullo maior reperitur, quam in oppoſitione. Illud autem longe a veritate abhorret, vim gravitatis lunæ in oppoſitione creſcere debere, ut quidam opinantur, propterea quod in eo ſitu, dum luna eſt in E, terra in T, ſol in S (F. XIV) directiones actionum terræ & ſolis conſpirent. At enim, quod ſæpe monui, non eſt vis abſoluta ſolis in terram & lunam conſideranda, ſed inæqualitas duntaxat virium, ſive exceſſus actionis ſolaris, qui in oppoſitione in terram, non in lunam exeritur, terramque a luna diſtrahit. Profecto haud difficulter intelligi poſſe arbitror, eundem neceſſario effectum conſequi, ſive nitatur ſol in coniunctione lunam*

a terra, five in oppofitione terram a luna diftrahere. In refolutione problematis & terræ & lunæ in oppofitione vel in arcu ulteriore tribuimus vim T S, vel C s; fed lunæ dein vim oppofitam a T adiecimus, quæ eam a terra diftrahat, & compenfet, id quod demonftrationis gratia adiectum fingitur. Sunt aliæ præterea motus lunaris perturbationes circa tempora periodica, diverfam orbitæ curvitatem, diverfam a terra, ac terræ una & lunæ a fole diftantiam: de quibus ut differamus præfixi limites haud concedunt. Lunam circa proprium axem converti intra id tempus, quo fuam circa terram periodum abfolvit, vel ex eo colligi poteft, quod eandem conftanter faciem nobis obvertat. At obfervatum eft, novas aliquando in orientali vel occidentali difco maculas confpici antea non vifas; quam mutationem vocant librationem lunæ in longitudinem, fi fimilis mutatio in parte difci feptentrionali, vel meridionali contingit, ea dicitur libratio in latitudinem. Prior ob diverfam lunæ celeritatem in fua orbita, altera ob diverfam latitudinem, five diftantiam ab Ecliptica, & inclinationem axis contingit. De motu lineæ apfidum, & nodorum fatis pro inftituto noftro egimus capite præcedente.

CAPUT III.

De Maris æftu.

Ex iis, quæ de legibus attractionis dicta a nobis, & de motu lunæ breviter indicata funt, phenomena æftus maris haud difficulter explicantur. Qua quidem re ipfa attractio mutua & univerfalis mirifice commendatur.

§. CCCXLIII.

Obfervatio. Æftus maris duobus oppofitis conftat motibus, qui in amplo oceano potiffimum confpicui funt, ubi maris aquæ per horas circiter fex verfus litora

tora fluentes in medio ſubſidunt, perque horas totidem refluentes iterum intumeſcunt in medio. Horum motuum primus dicitur *fluxus*, alter *refluxus*. triplex huius æſtus variatio, ſeu periodus obſervatur, diurna menſtrua & annua.

Periodus diurna hæc eſt. Mare ſingulis diebus bis elevatur, bis deprimitur. Maxima altitudo aquarum datur plerumque poſt adpulſum lunæ ad meridianum ſive ſuperiorem, ſive inferiorem: maxima depreſſio poſt ortum lunæ, & occaſum, ſic tamen, ut tempus æſtus maximi etiam pendeat a ſitu comparativo lunæ ad ſolem. Periodus igitur diurna abſolvitur horis ſolaribus 24 & 48′; quod ipſum eſt intervallum temporis inter tranſitum lunæ per meridianum, & reditum ad eundem.

Periodus menſtrua in eo ſita eſt, quod æſtus ſint maximi ſingulis menſibus paullo poſt ſyzigias ſolis & lunæ, & decreſcant in tranſitu lunæ ad quadraturas, & paullo poſt illas fiant minimi. Ratio aſcenſus maximi ad minimum eiusdem menſis ſecundum quasdam obſervationes eſt, ut 9 ad 5, aliquando etiam maior. Cæteris paribus æſtus fit maior, ſi minor eſt diſtantia lunæ a terra: item maior, cum luna in æquatore eſt, quam ſi ab eodem declinet.

Periodus annua cenſetur, ſi ſyzygiæ in dies æquinoctiales incidant; ac tum maximi ſunt æſtus: in quadraturis autem eo caſu minores ſunt, quam in aliis lunationibus. Contra ſi diebus ſolſtitialibus ſyzygiæ celebrentur, æſtus minores ſunt, quam in lunationibus aliis; at in quadraturis dein maiores ſolito æſtus contingunt. Hæc fere ſunt phænomæna regularia æſtuum, quæ ipſa pro diverſa locorum latitudine, & ſitu reſpectu oceani, unde derivantur, non eadem ſunt in locis omnibus. Sunt præterea complura alia phænomena prorſus irregularia, de quibus infra adnotabimus non nulla.

Ut porro intelligatur, quomodo iſtiusmodi phænomena actione luminarium, id eſt, ſolis ac lunæ efficiantur, in memoriam revocetur: primo *ex* §. *CCI. ſi tellus fluido perfecte homogeneo conſtaret, ac præterea motu vertiginis* ca-

careret, ea in ſphæram perfectam ſe conformaret, partibus eiusdem æquali undique gravitate libratis. Secundo. *Si ſingulæ telluris partes, a ſole & luna vi æquali & directione parallela traherentur, tota quidem globi maſſa moveri, partium vero ſitus reſpectivus nihil immutari poſſet.* Tertio. *Vis attractiva, quatenus in centra globorum tendit, eaque coniungere nititur, ita ſe habet, ac ſi omnes maſſarum partes in centris eſſent collectæ. Hanc attractionis vim Newtonus vocat* abſolutam, *per quam maſſæ integræ ita in ſe mutuo tendunt, ac ſi earum centra in ſe ſe agerent; conſequenter intelligi non poteſt, quomodo vi abſoluta attractionis, cuius unica inter duo centra eſt directio, reſpectivus partium ſitus eiusdem globi immutari queat. At enim concipi præterea debet alia vis attractionis* reſpectiva, *quæ in alias atque alias partes eiusdem globi alia atque alia eſſe poteſt, & vero etiam debet; cum enim diſtantia ſingularum telluris partium eadem non ſit, neque eædem ſint directiones, ſecundum quas diverſæ partes trahuntur; idcirco orietur attractionum differentia, & inæqualitas, quæ figuram fluidi, quod terram ambit, immutet, etſi illa ſphærica ponatur eſſe, uti in præſenti negòtio citra errorem poni poteſt.*

§. CCCXLIV.

Problema. *Oſtendere, quomodo attractionum inæqualitate ſeu vi reſpectiva luminarium figura ſphærica maris in punctis oppoſitis utriusque hemiſphærii mutetur.* Reſol. Sit (F. XVII. T. VI.) circulus F M E N figura ſphærica telluris maribus circumfuſa, ſitque luna in L. Quia partes in F propiores ſunt lunæ, quam circa N, ab eadem magis attrahuntur. Præterea partes F trahuntur directe in lunam, partes N oblique; vis hæc obliqua L N ſecundum leges mechanicas reſolvitur in vires N T, & N Q, vis N Q = T L ipſi etiam centro telluris competit; vis autem N T accreſcit gravitati partium circa N in terram, eandemque auget; quapropter partium circa N gravitas in terram maior eſt, quam partium circa F exiſtentium, tum quia hæc ob maiorem

D d vici-

viciniam magis trahuntur a luna, magisque distrahuntur a centro, in quod tendunt, tum quia trahuntur directe, cum e contrario obliqua tractio partium in N gravitatem earundem potius augeat.

2. Secundum attractionis leges partes in F lunæ propiores, & directe oppositæ maiore vi attrahuntur, quam centrum terræ, & centrum similiter vi maiore, quam partes in E hemisphærii oppositi. Quemadmodum igitur fluidum in F magis versus lunam tendit, quam centrum tendat, ob eamque caussam a centro distrahitur; ita centrum vi maiore, quam partes in E, tendit in lunam, pariterque ab iis partibus distrahi debet. Quoniam igitur ob actionem lunæ differentia quædam virium, & diminutio gravitatis relate ad centrum in punctis oppositis F & E simul contingit; aliarum vero partium circa M & N gravitas in terram nihil minuatur, sed augeatur potius actione lunæ ob vim NT, hinc secundum leges æquilibrii, & fluidorum mobilitatem partes minus graves in F & E elevari, in N & M deprimi debent; cumque diurna revolutione lunæ aliæ atque aliæ partes marium magis directe subiiciantur lunæ, eamque mutationem gravitatis subeant; idcirco & figura sphærica undarum identidem mutari, & alterna elevatio, & depressio oriri debet, in qua maris æstus consistit.

§. CCCXLV.

Corollaria. I. Vis solis in figura maris mutanda similem effectum, longe tamen minorem, quam luna præstat; etsi enim sol ob maiorem massam magis attrahat terram, quam luna; tamen differentia attractionum, quibus aliæ atque aliæ telluris partes a sole adficiuntur, longe minor est, quam quæ a luna oritur; tum quia directiones ex N & F versus solem ob enormem distantiam prope parallelæ sunt, tum quia differentiæ quadratorum in numeris maioribus minores sunt, quam in numeris minoribus; quare cum vires attractivæ sint ut quadrata distantiarum, in distantiis maioribus minor erit virium differentia, quam in minoribus.

II.

II. Differentia attractionum, quas sentiunt diversæ telluris partes, *actio luminarium* in hoc efficiendo motu adpellatur; & si actiones luminarium, nempe & solis, & lunæ conspirant, spectanda est *summa virium* ad mare turbandum; si vero actiones solis & lunæ ob diversum inter se situm pugnent, ita, ut sol aquas elevet, ubi luna deprimit, sumenda erit *virium differentia*.

III. Ex resolutione problematis perspicuum est: *aquas non elevari tota vi absoluta luminarium, sed respectiva, seu inæqualitate attractionum.* Quapropter nec leges attractionum, nec mentem Newtonianorum recte perspiciunt, qui putant, elevatis aquis in F seu in meridiano superiore, aquas in E seu hemisphærio opposito deprimi debere, propterea quod linea E F coniungens puncta opposita, versus L, id est, versus lunam tendat. Sed hoc quidem a veritate tam alienum est, ut nihil magis. Sit enim circulus F M E N orbita lunæ, T terra, sol in L. Ex dictis capite præc. patet, gravitatem lunæ in terram minui in syzygiis tam in coniunctione F, quam oppositione E; quod extra controversiam est. At secundum illorum opinationem gravitas lunæ in E oppositione existentis crescere deberet, quia directiones terræ & solis attrahentis conspirant, & linea E T F versus solem deberet accedere; quod maxime falsum est. Recte igitur Jacquier ait: *in eo situm est Cartesianorum sophisma, quod nempe fingant aquas attolli tota attractione lunæ, cum attollantur duntaxat attractionum differentia, nempe differentia inter attractionem totam, & illam attractionem, quam luna in centrum telluris exercet.* Concipiatur terra cessante omni alia vi in solem, & sublata cohærentia partium telluris versus lunam decidere: manifestum est, quod partes in F lunam directe respicientes maiore velocitate caderent, quam centrum, utpote maiori attractioni obnoxiæ, partes vero in E celeritate minore, quam centrum; hinc illæ centrum aliquantum desererent, has desereret ipsum centrum, ut adeo sphæra telluris necessario in sphæroidem oblongam abiret, cuius maxima diameter lunam respiceret. Aut fingatur primo gravitatem versus lunam in F, T, E eandem & æqualem esse; tum addatur parti-

bus in F alia vis gravitatem verſus lunam augens, & partibus in E vis oppoſita gravitatem minuens; quo intellecto non poteſt non intelligi, ſphæram in ſphæroidem deſituram.

IV. Recta e f coniungens puncta maximæ altitudinis aquarum in oppoſitis hemiſphæriis dicitur *diameter maxima ſphæroidis*; cum igitur motu diurno lunæ, aliæ atque aliæ partes marium attollantur, idcirco diameter maxima ſphæroidis motum lunæ potiſſimum ſequetur, & ſphærois terreſtris identidem mutabitur. Quoniam autem vis lunæ maior eſt in eas partes, quibus magis directe, & verticaliter imminet; ideo diameter maxima ſphæroidis, ſicut & luna, extra tropicos non multum egredietur. Sit F. XVIII. tropicus cancri DA; capricorni BC, æquator ÆQ. in L vel l luna. Æſtus, qui in uno hemiſphærio fit in tropico cancri A, eodem tempore in puncto oppoſito tropici capricorni in B continget, atque exundatio diurna, & diameter maxima ſphæroidis utrumque terræ tropicum eo die percurret. Atque hinc ſi concipiatur locus ſupra tropicum ſitus in I, ut in noſtro climate, exundatio reſpectu eius loci maior fiet, ſi diameter maxima ſphæroidis terminetur in A, ſeu in tropico cancri eiusdem hemiſphærii, quam ſi terminetur in puncto C tropici capricorni. *Univerſe quo vicinior eſt locus illi puncto, in quo diameter maxima ſphæroidis terminatur, eo maior cæteris paribus æſtus illuc propagabitur.* Inde fit, ut, ſi declinatio lunæ eſt borealis, æſtus in regionibus circa I poſitis maior habeatur luna tranſeunte per meridianum ſuperiorem, minor, ſi per inferiorem tranſit. Ex A enim copioſius propagatur æſtus verſus I, quam ex C, in quo puncto diameter maxima terminatur, ſi luna ad D meridianum inferiorem pertingit. Contrarium fit, ſi declinatio lunæ eſt auſtralis, uti patet. Quotiescunque igitur luna ab æquatore declinat, extremitates diametri maximæ, & conſequenter maximæ exundationes aquarum diverſos terræ circulos percurrunt: at ſi luna in æquatore verſetur, diameter maxima ſphæroidis, utpote ſemper per centrum tranſiens, utrinque in æquatoris circulo terminabitur, & propterea fieri debet,

ut

ut ſecundus tumor maximus ad idem punctum redeat, in quo primus fiebat, eidemque æqualis ſit; & quia tum luna æquali tempore ſupra & infra horizontem moratur, inter initium, & finem æſtuum æquale tempus interiacet, ut adeo in eodem circulo intra æquale temporis intervallum poſt maximum tumorem maxima depreſſio aquarum fiat; unde oſcillatio aquarum oritur, quæ actionem lunæ adiuvat, earumque altitudinem auget, haud ſecus ac in pulſando ære campano fit, in quo ſi nova per funem motus impreſſio incidit in manubrium deſcendens, facile augetur, & conſervatur oſcillatio; at ſiquis funem trahat, dum manubrium aſcendit, oſcillationem perturbat, minuitque.

§. CCCXLVI.

Explicantur Phoenomena Aestus.

I. *Eidem loco intra* 24^{h}, *&* 48 *æſtus bis contingunt;* nam luna intra hoc tempus utrumque hemiſphærium peragrat, atque æſtus eodem tempore in punctis oppoſitis utriusque hemiſphærii contingit.

II. *Elevatio aquarum in eodem etiam loco plurimis variationibus obnoxia eſt tum quoad tempus, tum quoad ipſam etiam magnitudinem.* Pendet enim ea ab actione & ſolis & lunæ; & pro vario ſitu comparativo luminarium, & poſitione ipſius loci modo ſumma, modo differentia virium ſumenda eſt; hinc magnitudo æſtuum neceſſario variatur. Deinde cum maris aquæ non minus, ac alia corpora vi inertiæ polleant, fieri non poteſt, ut momento temporis eam poſitionem acquirant, quam æquilibrium, & mutatio gravitatis poſcit; ſed opus eſt tempore quodam continuo, ut ad motum concitentur, atque ii motus impreſſi dein perſeverant aliquo tempore, uti penduli pondus aſcendit velocitate iam concepta, licet dein gravitas per totum aſcenſum ipſum retro urgeat. Atque ob hanc cauſſam phœnomena ab æquilibrio pendentia ſerius accidunt, quam ſine hac inertiæ vi acciderent; & decreſcente etiam vi luminarium aliquamdiu perſeverant, atque etiam incre-

 men-

mentum capiunt. Huius retardationis exempla in aliis etiam virium generibus suppetunt: sic maximum calorem non ipso meridie observamus, licet solis vis tunc maxima sit, sed aliquanto serius, nec in ipsis solstitiis æstivis, sed tardius. Nequit tamen maxima elevatio adcurate ad calculum revocari, cum ea a variis insuper aquarum motibus, litorumque diversis positionibus pendeat; id generatim statui solet, *maximam altitudinem aquarum haberi duabus vel tribus horis post adpulsum lunæ ad meridianum: maximam vero depressionem pariter post eius ortum, vel occasum*, ut adeo motus aquæ ascendentis, & descendentis perduret, donec luna dimidio fere quadrante a meridiano, vel dimidio quadrante ultra 90 gradus provecta sit. Si igitur luna hora 12 diei transit per meridianum dati loci; æstus maximus in utroque hemisphærio erit circa tertiam vespertinam respectu dati loci; si dein circa horam 12 noctis meridianum inferiorem transit, æstus maximus in utroque hemisphærio circa tertiam matutinam recurret. Et quoniam luna non plane intra 24 horas ad meridianum redit, sed 48′ tardius; idcirco tardiores erunt sequentis diei æstus, poscente id theoria, & confirmante experientia. Si aquæ gyro indigent, ut ad locum quempiam deriventur, hora æstus maximi alia atque alia in diversis locis, vel portubus esse debet.

III. *Æstus alii sunt in syzygiis, alii in quadraturis.* Nam in syzygiis cum sol & luna in directum iaceant, actiones luminarium conspirant, atque æstus fit summa virium, proindeque crescit cæteris manentibus iisdem; In coniunctione quidem, ubi sol & luna respectu terræ ex eadem parte consistunt, conspiratio virium facile intelligitur: sed quoniam in oppositione utrumque luminare aquas in punctis oppositis simul distrahit, etiam tum conspiratio virium, atque æstuum incrementum concipi debet. In quadraturis, ubi sol a luna 90° distat, actiones luminarium quoad aquas elevandas, & deprimendas inter se pugnant; igitur æstus fit sola differentia virium, estque minor, quam in aliis casibus; & quia ob hanc rationem a quadraturis ad syzygias æstus continenter crescunt, vespertini maiores erunt matuti-

tutinis: contra vero, quia a ſyzygiis ad quadraturas decreſcunt, matutini maiores ſunt veſpertinis. Etſi autem actiones luminarium in ipſis ſyzygiis maxime conſpirent: in ipſis quadraturis maxime pugnent; tamen altitudo maxima & minima aquarum aliquantum poſt ſyzygias & quadraturas eveniet ob rationem n. præc. indicatam. Præterea quoniam vis lunæ ſoli prævalet, maxima altitudo aquarum in quadraturis ſub luna erit, non ſub ſole. Univerſe autem ſi extra ſyzygias & quadraturas concipiantur rectæ ex terra in ſolem & lunam ductæ, diameter maxima ſphæroidis iacebit inter acutos angulos, quos eæ rectæ comprehendunt, multo tamen propius accedet ad rectam, quæ in lunam ducta eſt. Si ſol lunam præcedat, fieri poteſt, ut maxima altitudo aquarum etiam præcedat tranſitum lunæ per meridianum loci. At ſi ſol ſequatur lunam, etiam maxima altitudo tranſitum lunæ per meridianum ſubſequetur. Ex quo adparet, quomodo tempus æſtus maximi pendeat a ſitu comparativo luminarium.

IV. *Si ſyzygiæ incidunt in dies æquinoctiales, æſtus ſit maior*, quia & ſol & luna tum verſatur in eodem æquatoris plano, adeoque utriusque coniuncta actio mare agitat, cietque eo loco, ubi maxime cieri poteſt. *In ſyzygiis ſolſtitialibus æſtus minores ſunt*, quia neutrum luminare in æquatore exiſtit, & exundatio aquarum diverſos terræ circulos percurrit.

V. *Æſtus, qui contingunt ſole verſante in tropico, & luna in quadraturis, maiores ſunt iis, qui ſiunt ſole in æquatore, & luna in quadraturis exiſtente*; nam in primo caſu luna eſt in æquatore, in ſecundo eſt in alterutro tropico; & quoniam æſtus plus pendet a luna, quam a ſole; hinc maior fieri debet tum, cum efficacia lunæ maior eſt. Et quia ſol terræ vicinior eſt hyeme, quam æſtate; maiores erunt æſtus poſt æquinoctium autumnale, & ante vernum. Ex quo phœnomeno perſpicuum eſt, ſolem non omnino nihil agere in ciendo mari; etſi enim eius actio minor ſit actione lunæ; tamen, cum non penitus nulla ſit, ea nunquam efficacius ſe prodit quam in ſyzygiis. nunquam minus, quam in quadraturis; ubi actiones luminarium inter ſe pugnant.

VI. *Post syzygias in solstitiis celebratas aestus quadraturarum maior est, minor post syzygias in aequinoctio celebratas.* Patet ex n. praec. nam priore casu sol in tropico, luna in aequatore est: posteriore sol in aequatore, luna in tropico.

VII. *Duo aestus maximi non possunt alter alterum continuo sequi.* Cum enim ex variata lunae distantia maior aestus variatio oriatur, quàm ex variata distantia solis; hinc si altera syzygiarum, in quibus aestus menstrui maximi sunt, in perigaeo lunae contingit, altera in apogaeo fiet; proinde in priore casu aestus maior, in posteriore minor erit.

VIII. *In hyeme tempore syzygiarum aestus matutini maiores sunt vespertinis: At in aestate aestus vespertini maiores sunt matutinis.* In hyeme enim sol versatur circa tropicum capricorni BC; ac si praeterea sit in meridiano inferiore ut respiciat punctum B, & luna in coniunctione ex eadem parte, vel in oppositione ex parte opposita, ut respiciat punctum A, diameter maxima sphaeroidis terminabitur in B & A; & circa horam tertiam matutinam in A fiet aestus, indeque versus locum I facilius propagari potest, quam ex loco C existente sole in meridiano superiore, & circa tertiam vespertinam aestum efficiente. Similiter ostenditur, contrarium fieri debere tempore aestivo.

§. CCCXLVII.

Propositio I. *Etsi certum ponatur esse, aestum, ac variationes regulares eiusdem ab actione luminarium pendere; tamen possunt, ac debent plurimae aestuum anomaliae existere.* Probatur. Ex resolutione problematis perspicuum est, ad aestum regularem requiri *primo*, ut mare ampliore tractu ab ortu in occasum, & saltem 90° pateat; aestus enim fit differentia attractionum; in exiguo autem tractu notabilis differentia vel distantiarum a luminaribus, vel directionum, secundum quas agunt, dari nequit. *Secundo* ut motus aquarum liber sit, neque insulis, aliisve obstaculis impediatur. *Tertio* ut ea sit latitudo loci, in qua vel actio luminarium, vel com-

communicatio æſtuum ſenſibilis eſſe queat. Cum enim luminaria fere intra tropicos coerceantur, actio eorundem magis directe, & verticaliter non exercetur, niſi in aquas intra tropicos exiſtentes: aucta magis magisque latitudine æſtus duntaxat habentur per actionem luminarium valde obliquam, & per communicationem ex aliis locis, quorum minor eſt latitudo; eiusmodi obliqua actio & communicatio in magnis ab æquatore diſtantiis parum ſenſibilis eſſe poteſt. Porro hæ conditiones, quæ ad regularem æſtum neceſſariæ ſunt, plurimis locis ſemper, & in multis ſæpenumero deficiunt; igitur anomalias oriri neceſſum eſt, quarum adcurata ratio adferri non poteſt, niſi ſingulæ locorum, aliorumque obſtaculorum circumſtantiæ ſint exploratæ; exempli cauſſa commemorabo aliquas anomalias, ex quibus de aliis coniectura fieri poteſt.

I. Ut actio luminarium, & vis reſpectiva attractionis effectum ſortiatur mare valde extenſum ſit oportet. Hinc in mari pacifico maiores ſunt æſtus, quam in atlantico, & in locis quibusdam zonæ temperatæ maiores, quam in anguſto ſpatio zonæ torridæ inter Americam, Africam. Latus occidentale Europæ in oceano Atlantico lunæ directius ſubiacet, & communicationem ex partibus inferioribus marium admittit; idcirco ex parte Luſitaniæ, Hiſpaniæ, Galliæ, qua occidentem reſpiciunt, magna exundatio obſervatur.

II. In portubus Galliæ obſervatum eſt, aquas celerius affluere, quam refluere. Nam procurrens Africa retardat primo affluxum ex oceano magis orientali. Quando dein aquæ verſus eas partes demum affluunt, luna interea verſus occaſum magis progreſſa, aquas in mari inter Africam, & Americam ſeptentrionalem poſitas attollit; unde hæ quoque illuc affluent. Celeriter ergo altitudo aquarum increſcit; eaque dein longiore tempore perdurat, propterea quod refluxui obſtet America, nec partes aquarum verſus occidentem ſatis libere exonerari poſſunt. Habet igitur id portus Galliæ ſingulare, neque, ut quidam exiſtimarunt, inter regularia phænomena æſtuum id recenſendum eſt; cum teſte Boſcovichio nuſpiam alibi legatur, præterquam in ob-

ſervationibus per galliæ oras habitis, quæ oceano conterminæ ſunt.

III. In locis verſus polos ſitis ultra 65 grad. latitudinis nullus aut unicus duntaxat intra 24 hor. obſervatur æſtus. Nam ut paulo ante diximus, actio luminarium valde obliqua, & communicatio æſtus in maiore ab æquatore diſtantia denique vix ſenſibilis eſſe poteſt; eiusmodi diſtantiæ merito cenſentur, quæ ab æquatore ultra 65 grad. recedunt. Enim vero ſi luminaria perpetuo in æquatore verſarentur, nulla ſub polis aquarum agitatio fieret in locis polo propinquis admodum exigua, præſertim quia enormes glacies motibus aqnarum plurimum obſiſtunt. Ponatur iam luna verſus boream declinare, & concipiatur locus intra polum & lunam ſitus. Si luminare hoc meridianum ſuperiorem tranſit, aquas in dicto loco poterit ciere, quia diſtantia maximæ diametri ſphæroidis a dato loco deficit a 90°. At ſi luna meridianum inferiorem attingit, diameter maxima ſphæroidis terminabitur reſpectu dati loci in partibus auſtralibus; unde tanto ſpatio verſus boream æſtus ſenſibilis propagari nequit; cumque vis ſolis multo minor ſit ad mare ciendum, unicus intra 24 horas æſtus notabitur.

IV. Mare nigrum, Caſpium & Balthicum nullos aut prope nullos patiuntur æſtus. Sunt enim veluti lacus quidam, qui cum oceano nihil aut non niſi per anguſtum fretum communicant; parvi autem æſtus a ventis aliiſque cauſſis turbari poſſunt. Accedit, quod mare Balticum ab æquatore plurimum diſtet. In mari mediterraneo æſtus perexigui ſunt, propterea quod eius cum oceano communicatio valde anguſta ſit, & ipſum non extendatur ultra 60°. In ſinu veneto, etſi is amplus non ſit, æſtus tamen manifeſtus & regularis obſervatur; aquas enim altius conſtringit, & ad aſcenſum cogit. Univerſe ſi aqua ſatis cietur, ea in locis interclusis, & ſinuoſis altius adſurgit, quia poſt intumeſcentiam nequit diffluere ad latera. In parva autem maris extenſione, ſi deſit apta communicatio, magnus æſtus fieri non poteſt, quia is non niſi ex aquis ad quadrantem telluris refluentibus affluit. Hinc maria

ria terris inclusa, & angusta nullo propemodum æstu laborare diximus, nisi cum alio mari satis communicent. Per fretum Herculeum & oresundicum affluit quidem aqua in mare mediterraneum & Balticum; hic tamen modicus influxus non sufficit æstui regulari inducendo. In ipso freto herculeo æstus admodum varius est, cum illuc plures aquæ ex oceano & mari mediterraneo allapsæ confundantur.

V. Si flumina quædam, aut putei non nulli patiantur æstum; is maxime irregularis & incertus est, & occultæ communicationi cum mari adscribi potest. Euripi verisimiliter oriuntur ex collisione aquarum, & directione undarum in latentes rupes, insulas, litora impingentium.

VI. Si aquæ per plures ductus affluentes inter se colliduntur, elatio aquarum maxima fieri debet, ut inter Belgium, & Brittaniam accidit. In insulis multum dissitis a continentium litoribus exigui contingunt æstus. Quantum enim fere ex uno latere ad ripas insulæ attollitur; tantum ex altero defluit. In insula S. Thomæ, quæ sub ipso æquatore sita est, mare vix ad 4 pedes assurgit; in Moluccis, & Philippinis vix ad duos tresve pedes; ratio mox indicata sufficere videtur si præsertim in considerationem veniat, regularem æstum, quatenus præcise actioni luminarium debetur, non nisi $6\frac{1}{2}$ ped. esse debere, uti paullo post indicabo. Ad litora & freta angusta, motus vehementior & maior altitudo observatur, quam in aperto mari. Dum enim undarum affluentium motus obiecto quodam obstaculo sistitur: aliæ autem, atque aliæ aquæ identidem succedunt; aquæ necessario ultra modum attolli debent, præsertim si litora haud præcipiti descensu ad mare apertum spectant. In quibusdam portubus (ait Boscovichius in diss. de Maris æstu) aliqua anni tempestate nullus observatur æstus, ut in portu Tunquinensi Bathsam luna existente in æquatore, vel quia, ut Newtonus explicavit, in eum portum ex una parte tum advenit æstus, cum ex alia recedit; vel quia, ut notavit Eulerus, in tractu maris extenso a borea in austrum certo quodam limite, luna ac sole

in

in æquatore fitis, nullus æftus ad marginem borealem haberi debet, quia aqua, dum fub æquatore detumefcendo fubfidet, fe effundit in illud maius auftrale intervallum. Similem ob cauffam poteft aliquando in eodem portu unicus haberi æftus fingulis diebus, & poffunt etiam plures, aqua per diverfas vias diverfis temporibus eo delata. Dum enim æftus ab oceano ad eundem portum per freta diverfa propagatur, & per alia citius & facilius tranfit, quam per alia; tum idem æftus in duos, vel plures fuccedentes divifus novos motus diverforum generum poteft efficere.

§. CCCXLVIII.

Peopofitio II. *Phænomena regularia æftuum maris actioni luminarium tanquam veræ & genuinæ cauffæ adfcribi debent.* Oftenditur. I. Cauffæ rerum naturalium non plures admitti debent, quam quæ & veræ funt, & phænomenis explicandis fufficiunt; quæ quidem Newtoniana philofophandi lex nequit ulli exceptioni obnoxia effe. Porro *veræ* cenfentur cauffæ, quarum exiftentia potiffimum experimentis, & obfervationibus innotefcit. Atque legem attractionis mutuæ & univerfalis, ex qua actio luminarium provenit, in natura exiftere reipfa, & per totum fyftema folare late dominari, nemo credo, rerum phyficarum, & mathematicarum peritus dubitare iam aufit. Eandem actionem luminarium effe fufficientem phænomenis regularibus æftus producendis, poft Newtonum plures mathematici præftantiffimi initis calculis exhibuerunt, ita, ut in maribus liberis atque apertis aqua ob vim lunæ ad $4\frac{2}{7}$ pedes, & binis viribus luminarium confpirantibus ad $6\frac{1}{2}$ ped. elevari poffit, ac debeat, nec nifi ob naturalem inertiam undarum fit, ut in libero mari ordinaria fluxuum altitudo fit 8 pedum; quæ ob litorum pofitiones, variasque reflexiones in portubus, finubus ac fretis multo maior evadit.

II. Eft alia præterea philofophandi lex, eaque tutiffima, ut, quoties effectus aliquis ex una parte femper, eodemque modo habetur, quando eædem circum-

cumstantiæ concurrunt; & ex altera parte quædam caussa apta, proportionata adparet ad eum effectum in iis circumstantiis producendum, hæc ipsa illius effectus caussa censeatur; Cum igitur inter triplicem æstus periodum, & varias positiones ac motus luminarium constans, & plane mirificus consensus intercedat, ita, ut crescente actione luminarium æstus crescat, decrescente decrescat; dubium esse non potest, hanc & veram & sufficientem æstuum caussam esse. Neque anomaliæ obsunt; nam finge modo, dari attractionem mutuam, & universalem, ex qua luminarium actio pendet; atqui posita ea attractione nihilominus anomaliæ æstuum evenire poterunt ac debebunt; uti ex præc. Propositione perspicuum est. Quid igitur ex illis anomaliis contra actionem luminarium concludes denique? nihil sane, nisi me omnia fallant. Nec refert, si ratio cuiusvis anomaliæ celeriter adferri nequit; Quis enim neget, suspensionem mercurii in barometro a pressione aeris oriri; & tamen caussas mutatæ altitudinis minutim explicare quis poterit?

Consideranti hanc theoriam de maris æstu, quæ vix dubio locum relinquit, facile in mentem veniet, eosdem motus reciprocos ab actione solis & lunæ in atmosphæra quoque terrestri effici debere, cum actio luminarium, antequam ad maris aquas perveniat, necessario per atmosphæram transmittatur. Cl. Paullus Frisius rem hanc prolixiore calculo examinandam sibi sumsit, & in Prop. XXXVIII. Coroll. III & IV L. II. de gravitate omnium particularum reperit, differentiam altitudinum aeris homogenei esse minorem differentia altitudinum maris in ratione 2 : 5 proxime, ita nimirum ut differentia summæ altitudinis aeris sit $1\frac{13}{15}$ ped. ob vim lunæ, & ob vim solis pollicum $9\frac{1}{5}$. Habita vera ratione inertiæ necessario fit, ut particulæ aquæ & aeris velocitate fluendo acquisita ultra limites æquilibrii excurrant, & maior utrinque elevatio prodeat, quam vis luminarium deposcat; quamquam hæc quidem caussa in maris aquis maius altitudinis incrementum efficere debeat, quam in aere, ob positionem litorum maris, a quibus aquæ intumescentes copiosius reflectuntur, & accumulantur; id

quod

quod in libero aere non fit. Differentia altitudinum mercurii in barometris ob gravitatem aeris actione luminarium perturbatam ex Frisii calculis maior non est, quam $\frac{1}{108}$ lin. ob vim solis, & $\frac{1}{48}$ lin. ob vim lunæ; quæ sane quantitas notabilis haud est. Idem auctor deprehendit, velocitatem venti ex actione luminarium, non nisi exiguam, & insensibilem oriri posse, ventumque, siquis inde oritur, potissimum lunæ motum comitari debere. Quare cum orientalis ventus, qui intra tropicos continuo spirat, satis sit validus, nullamque directionem continuam habet (uti recentissimæ observationes ostendunt) nisi raro tantum, & quæ variæ declinationi solis ab æquatore ac loco in ecliptica respondeat, ratio ipsius ex vi perturbatrice solis ac lunæ nequaquam repeti potest, sed a potioribus caussis derivandus est, videlicet a calore solis & alterna aeris rarefactione. Sunt, qui ita differunt: si actio luminarium commovendo vasto mari par est, etiam aliorum corporum gravitas, & inprimis pendulorum oscillationes eadem perturbari debent; Sed Eulerus inito calculo, numeros oscillationum eiusdem penduli pro casu maxime auctæ & imminutæ gravitatis non magis differre, quam hosce duos numeros 4666667 & 4666666. Quæ sane differentia inter alias penduli & horologiorum inæqualitates percipi haud potest. Sed similia recurrent sequenti capite.

CAPUT IV.

De figura telluris, & caussis diversæ gravitatis in diversis terræ locis.

Ex observationibus ope theoriæ de pendulorum motu §. CCLIII. deduximus, non eandem corporum terrestrium gravitatem in diversis terræ tractibus esse. Eius rei ratio nunc indicanda est; quo quidem loco etiam de figura telluris, quantum instituti nostri fert ratio, differemus.

§.

§. CCCXLIX.

Hypothefis. *Siquis in dato loco metiatur altitudinem ftellæ polaris; dein fub eodem meridiano verfus polum accedat, vel ab eo recedat tamdiu, donec ea ftella uno gradu altior fupra horizontem, aut uno gradu depreffior adpareat; idque intervallum refpondens uni gradui meridiani cœleftis in terra five meridiano terreftri metiatur, colliget fequentia:*

I. Quoniam meridianus cœleftis & terreftris in eundem numerum graduum homologorum dividitur, inventum intervallum etiam continet *unum* gradum latitudinis loci in meridiano terræ.

II. Si terra effet fphærica, ex invento gradu, eiusque longitudine ambitus totius meridiani terreftris, & circuli maximi haberetur. Sit enim numerus hexapedarum n, qui uni gradui refpondet, ac fiat: $1^{o}: 360^{o} = n: n \times 360^{o}$. quartus terminus exprimet ambitum meridiani terreftris.

III. Siquis in diverfa latitudine metiatur gradum meridiani terreftris uni gradui meridiani cæleftis refpondentem, & intervallum inæquale reperit, terra fecundum eam partem non eft fphærica; uti patet. Ac quo minus eft intervallum uni gradui refpondens, tanto maior in eo loco telluris convexitas, feu curvedo eft: quo autem maius eft intervallum; quod uni gradui refpondet, eo minor eft curvedo terræ; five quo loco minor eft gradus meridianus, ibi terra magis protuberat: ubi maior eft gradus meridiani, ibi eft magis complanata, feu compreffa. Ex binis enim arcubus circularibus fimilibus, five quorum uterque eundem numerum graduum continet, is, qui maiorem menfuram in pedibus habet, maioris radii eft; & qui minorem, minoris; curvitates autem funt reciproce ut radii ex Elem.

§. CCCL.

Propofitio I. Figura terræ ad polos compreffa eft: ad æquatorem vero protuberat. Dem.

I.

I. *Ex dimensionibus geometricis.* Gradus meridiani terrestris ad hexapedas redacti ope dimensionum maiores sunt versus polos, quam in Galliis, & hic maiores, quam sub æquatore; igitur ad polos minima est curvedo superficiei terrestris, maior in Galliis, maxima sub æquatore. Conclusio ex præc. §. n. III. patet: antecedens ex subiecta Tabella.

Meridiani gradus.	Latitudo loci.	Gradus observati in Hexap.
Peruvianus	o	56753.
Africanus	33°. 18'.	57037.
Italicus prior	43. 1.	56979.
Gallicus prior	43. 31.	57048.
Alter Italicus	44. 44.	57069.
Germanicus	47. 40.	57091.
Alter Gallicus	49. 23.	$57074\frac{1}{2}$
Brittanicus	53. o.	57300.
Lapponicus.	66. 20.	57400.

Tabellam recenset Cel. Frisius L. II. de gravit. omn. Partic. Observ. II. Inter has aliasque observationes, ac dimensiones, quæ nostra ætate institutæ sunt, memorabitur semper expeditio, quæ a Regia Parisiensi Academia ad æquatorem & Polarem circulum decreta est. Peruvianum gradum anno 1736 *dimensus est Bougerius. Maupertuisius eodem anno in Lapponia dimensus est Lapponicum, eumque aliter definivit, quam loco ultimo a nobis positus est; sed adhibitis correctionibus, factaque æstimatione errorum talem, qualem posuimus, censet Frisius, cit. loco. Si primum, ac ultimum, id est, Peruvianum, & Lapponicum gradum inter se compares, mox intelliges, ad polos esse gradus longiores, proindeque terrestrem superficiem planiorem, quam circa æquatorem. Gallicum gradum, quem ordine latitudinis locorum* priorem *dixi, in lat.* 43°. 31'. *Cassinus & Caillius determinarunt. Alterum Gallicum Picartus iam dimensus erat, statuitque hexap.* 57060. *Maupertuisius dein post reditum a polari circulo, correctis astronomicis observationibus Picarti statuit hexaped.* 57183. *Cassinus vero, & Caillius Anno*

1740,

1740, *in basi a Picarto assumta deprehenso errore, qui compensabat fere errorem alium astronomicarum observationum, meridianum gradum in lat.* 49°. 22′ *esse voluerunt* 57074½ *hexap. ut in Cassini opere de meridiana linea videre est. Et quidem correctio hæc baseos quinquies repetita est mensuris intra paucos digitos convenientibus: & cum in suspicionem iterum adducta esset, anno* 1756 *a Clar. Monnierio, aliisque Academiæ sociis recognita, & confirmata est. Africanum gradum prope promontorium bonæ spei, & in latitudine australi* 33°. 18′ *itidem Clariss. Caillius dimensus est. Italicus prior in lat.* 43°. 1′ *debetur Boscovichio & Mairio, qui eam determinationem fuse exposuerunt in opere de expeditione literaria per ditionem Pontificiam. Alterum Italicum ante paucos annos determinavit Clar. Beccaria in lat.* 44°. 44′. *Germanicus a Clar. Liesganing in Stiria determinatus sepositis inæqualitatibus censetur* 57091 *in lat.* 47⅔°. *Denique in Anglia secundum observationes a Nervoodo factas gradus meridiani in lat.* 53 *censetur hexap.* 57300.

II. *Ex motu vertiginis terræ.* Cum terra motu diurno circa axem agatur, uti adhuc posuimus, ac sequenti capite ostendemus, corporum gravitas in æquatore maxime ob maiorem rotationis celeritatem, ortamque vim centrifugam minuitur; quapropter aquæ illic assurgere, circa polos vero dehiscere debent, ut æquilibrium tueantur. Igitur figura telluris nequit esse sphærica, sed sub æquatore protuberans, sub polis compressa. Ac concepit primo Newtonus figuram telluris sphæricam, totamque fluidam; tum vero adiecto motu vertiginis facile vidit, secundum mechanicas leges sphæram in sphæroidem abire debere. "Quod autem „ telluri, inquit Mac-laurin. Expos. Phil. Newt. L. IV. „ C. 6. contingeret, si tota fluida esset; id etiam nunc „ in ea locum habet, etsi alia sit eius conditio. Ete- „ nim si firma, ac solida illius portio exposita figura „ destitueretur, & globosa tantummodo esset; oceanus „ per totum undique tractum sub æquatore diffusus re- „ giones polares pluribus passuum millibus supra aqua- „ rum superficiem eminere fineret: cum tamen eas

„ non magis supra libellam oceani attolli videamus, „ quam continentes partes æquatori subiectas. „

Newtonus vim centrifugam sub æquatore ad vim gravitatis terrestris ait esse, ut 1: 289. *quæ ratio parum discrepat a nostra.* §. *CCLXXVI. n. X. Diametrum vero æquatoris ad axem vult esse ut* 230 *ad* 229; *alii ut* 231: 230. *Gradum per polos transeuntem statuunt hexap.* 57493; *cuius differentia a Peruviano sive primo post æquatorem meridiani gradu est* 740 *hex. gradus æquatoris censetur hex.* 57247; *unde ambitus æquatoris facta multiplicatione per* 360, *fit* 20608920 *hex. radius æquatoris* 3280108 *hex. sive milliarium Italicorum* $4293\frac{1}{3}$, *milliari unicuique tribuendo hexapedas* 764. *Denique semiaxis minor hex.* 3265909, *&* *differentia altitudinum terræ supra centrum sub polis & æquatore erit hexap.* 14199, *sive milliarium* $18\frac{3}{5}$.

§. CCCLI.

Propositio II. *Anomaliæ gravitatis corporum terrestrium, quæ in diversis locis observantur, a lege attractionis mutuæ & universalis, & proxime a figura, & constitutione telluris pendent.* Ostenditur.

I. *Ex figura terræ.* Tellurem ad polos compressam esse, circa æquatorem magis elevatam, supra ostendimus; ac demonstravit primus Mac-laurinus, fluidum homogeneum, cuius particulæ se invicem attrahant in ratione reciproca duplicata distantiarum, si gyret circa proprium axem, debere induere figuram sphæroidis ellipticæ, in qua idcirco gravitas ab æquatore ad polos necessario crescat. Porro hoc incrementum gravitatis ab æquatore ad polos ex longitudine pedis horarii versus polos crescente intelligitur, uti subiecta tabella exhibet concinnata a Cel. Frisio L. II. de gravit. omn. particul. obs. V.

Locus

Locus obſervationis.	Latitudo loci.	Longitudo pend. in lin.	Longitudinis incrementum.
Sub æquatore.	0	439. 21.	0.
Ad Portobello	9°. 34′.	439. 30.	0. 09.
Ad Petit-goave	18. 27.	439. 47.	0. 26.
Ad Prom. B. S.	33. 18.	440. 14.	0. 93.
Romæ.	44. 54.	440. 38.	1. 17.
Pariſiis.	48. 50.	440. 67.	1. 46.
Londini.	51. 31.	440. 75.	1. 54.
Petropoli.	59. 56⅔.	441. 23.	2. 02.
Pelli.	66. 48.	441. 27.	2. 06.

Ex his generatim conſtat, gravitatem corporum terreſtrium verſus polos creſcere, quemadmodum & longitudo pedis horarii creſcit; id quod attractioni terræ eam, quam diximus, figuram habentis conforme eſt.

II. *Ex conſtitutione telluris.* Etſi textus partium telluris prope ſuperficiem ſit inæqualis, nec de interno textu ſatis conſtet, utrum non conſtet orbe interius cavo, aut nucleo uno vel pluribus diverſæ fortaſſis figuræ, poſitionis, & denſitatis, ut adeo incrementum gravitatis ſatis tuto ex ſola figura telluris derivari nequeat, & ad certam continuamque legem revocari; tamen nec quævis texturæ diverſitas *ſenſibilem* gravitatis, & pedis horarii mutationem valet, & reipſa nonnullæ inæqualitates cum lege attractionis univerſalis cohærentes obſervantur; uti nunc recenſebimus. 1. Obſervatum eſt, ipſum ſitum verticalem penduli a montibus circumpoſitis turbari poſſe, & turbari reipſa. Cel. commentatores Principiorum Newtonianorum T. III. p. 44. oſtendunt, pendulum ad montis radices poſitum, cuius maſſa telluri homogenea, capacitati ſphæræ diametri unius leucæ marinæ æqualis eſt, a directione ſua magis, quam unius minuti intervallo vi montis illius retrahi debere. Hæc aberratio ſine dubio minuitur, ſi pendulum ab aliis montibus circumpoſitis in contrarias ſimul partes retrahitur, vel ſi interna conſtitutio montis, magnis cavernis diſtincta, aut pyramidalis eius-

 dem

dem figura, vel aliæ circumſtantiæ impediunt, quo minus eiusmodi penduli aberrationes ſenſibiles fiant. Bougierius & Condaminius, cum propter dimenſionem gradus terreſtris circa æquatorem inter altiſſimos, & prægrandes regni Peruviani montes verſarentur, capto in Chimboraci monte experimento ſenſibilem penduli deviationem deprehenderunt. Sæpe etiam catena montium circumpoſitorum præſto eſt, quæ ſitum penduli perturbet: 2. In locis præaltis ob maiorem a telluris centro diſtantiam minor deprehenditur gravitas, minorque eſt pedis horarii longitudo. Quiti, quæ urbs 1466 hexap. ſupra libellam maris attollitur, pes horarius eſt 438. 88 lin. in vertice montis Pichincha hexapedis 2434 ſupra eandem libellam, lin. 438. 69. 3. Sub eadem fere latitudine minor obſervatur gravitas ad litora maris, & maiore adhuc cum diſcrimine in minoribus inſulis, quam in locis terræ firmæ a mari valde remotis, teſte P. Georg. Kraz in diſſ. de gravit. & diſtant. lunæ. Addit: licet Hafniæ in inſula Zelandiæ latitudo latitudinem Lutetiarum ſeptem fere gradibus ſuperet; eodem tamen utrobique horologio oſcillatorio adhibito nullum omnino gravitatis diſcrimen fuit deprehenſum: quæ quidem gravitatis anomaliæ aliunde veriſimilius peti profecto nequeunt, niſi ab ipſa inæquali partium terræ denſitate; prout etiam res ipſa ſe habet, quando nimirum aqua marina minoris eſt denſitatis, quam partes terræ ſolidæ, inter quas iterum quoad denſitatem datur inæqualitas; unde mirum non eſt, quod in inſulis, & ad litora maris, præſertim ſi declivitate valde præcipiti in mare deſcendat, cæteris paribus minor ſit gravitas, quam in aliis regionibus terræ firmæ; cui præterea accedit, quod regiones, ex quibus flumina per magnum tractum vehuntur, donec in mare ſe exonerent, notabiliter ultra libellam maris ſint elevatæ; atque hoc ipſo anomaliæ gravitatis exiſtere poſſint.

Exercitationis loco adnectam I. Comparationem vis centrifugæ ſub æquatore, & gravitatis corporum ibidem. Ex tempore revolutionis diurnæ, quæ æquabilis eſt, & ambitu æquatoris invenitur eiusdem arcus, qui intra 1'' per meridianum tranſit. Inventi arcus quadratum

per

per diametrum æquatoris divisum exhibet effectum vis centrifugæ (§. CCLXXVI. n. VIII. consect. 2.) Ex pede horario sub æquatore in tabella indicato reperitur spatium ver vim gravitatis, quæ sub æquatore est, intra 1'' *lapsu libero conficiendum secundum methodum §. CCLIV. indicatam. Hoc spatium si comparetur cum effectu vis centrifugæ, rationem inter hanc, & gravitatem sub æquatore exhibebit. Sit igitur tempus revolutionis diurnæ* $23^{h}.\ 56'.\ 4''. = 86164''$. *Ambitus æquatoris* = 20608920 *hexap. sive* 123653520 *pedum. Fiat: ut totum tempus revolutionis ad totum ambitum; ita minutum secundum, ad arcum intra id descriptum, qui reperitur* 1435 *ped. quadratum huius arcus* (2059225) *divisum, per diametrum æquatoris exhibet eiusdem sinum versum sive effectum vis centrifugæ intra* 1''. *Quoniam radius æquatoris est* 3280108 *hexap. erit diameter si ad pedes reducatur,* = 39361296: *Igitur facta divisione erit sinus versus & effectus vis centrifugæ intra* 1'' = 0. 05232 *ped. sive* 7. 537 *lin. Reliquum est, ut etiam effectus gravitatis terrestris sub æquatore, sive spatium intra* 1'' *conficiendum quæratur. Fiat: ut peripheria* 355 *ad diametrum* 113; *ita tempus unius oscillationis sive* 60''' *ad tempus descensus per dimidium pedem horarium sub æquatore seu ad* 219, 60. *Erit igitur hoc tempus* = $19\frac{35}{355}$ *sive* $19\frac{7}{71}$. *Dein fiat: ut quadratum huius temporis* ($\frac{1838236}{5041}$) *ad dimidium pedem horarium sub æquatore* (219160) *ita quadratum unius minuti secundi seu* 3600''' *ad spatium eo tempore per gravitatem sub æquatore confectum, quod reperitur* = 2167. 37 *lin. Est igitur gravitas terrestris sub æquatore ad vim centrifugam ut* 2167. 37 *ad* 7. 537 *sive ut* 2167370 *ad* 7537 = 287 : 1 *proxime ut reperi* §. *CCLXXVI n. X.*

II. Putant non nulli, si omnia corpora in se mutuo gravitant, omnia pariter, quæ nos circumstant, ad se invicem accedere, & in cumulum coire debere. Utinam attractionis hostes calculos plusculum adamarent, quam imaginando rem quamvis definirent. Quam celeriter animadverterent levitatem eiusmodi argumentorum, & imaginationis ac præiudiciorum ludibria! ineamus igitur ea

ea de re calculum admodum facilem, collocemus in superficie terræ prorsus horizontali, & perfecte lævi binos globos æquales, itidemque perfecte læves eiusdemque, ac tellus nostra habet densitatis; secludamus animo quamvis aeris resistentiam; & comparemus vim, a qua ob attractionem in se mutuam ad accessum determinantur cum vi, qua gravitant in tellurem. Hæ vires sunt directe ut massæ attrahentes, & reciproce ut quadrata distantiarum a centro sphæræ attrahentis; massæ autem globorum homogeneorum sunt ut cubi radiorum ex Elem. Sit igitur radius terræ in æquatore $R = 19680648$ *ped. radius globorum* $r = 1$ *ped. distantia centrorum* $b = 10$ *ped. Vis gravitatis in terram* V; *vis mutua globorum* u; *erit* $V : u = \frac{R^3}{R^2} : \frac{r^3}{b^2} = R : \frac{r^3}{b^2} = 19680648 : \frac{1}{100} = 1968064800 : 1$. *Quantula est hæc vis mutua globorum relate ad gravitatem in terram! & quantum tempus requiritur, ut motus ea vi genitus sub sensus cadat! Accedat iam inæqualitas superficiei, & asperitas: accedat resistentia aeris; & omnis effectus eiusmodi vis elisæ evanescet. Adposite igitur canit Stayus L. IV. a v. 1701. in hanc sententiam; ineptus sane sit, qui hoc modo censeat impugnari posse gravitatem mutuam generalem, ut esset is, qui muscam non esse gravem in terram censeret ob eam caussam, quod crassum & bene tensum funem, aut tenacem ramum nihil ad sensum videret deprimi ipsa ad eum musca advolante. Sed quæratur tempus, quo eiusmodi globi vel uno pede singuli moverentur seposita omni motus resistentia. Ex §. XCV. n. II. spatia vi acceleratrice diversa intra certum tempus confecta exprimuntur hac formula* $S = VT^2$; *consequenter* $T^2 = \frac{S}{V}$. *Virium valorem supra invenimus; sit spatium* S *gravitate terrestri in æquatore intra* $1''$ *confectum* $= 2167.37$ *lin.* $= 15.051$ *ped. Spatium a globo in mutuo accessu confectum* $S = 1.\ T = 1''$. *Fiat igitur* $\frac{S}{R} : \frac{sb^2}{r^3}$

$=$

$$= 1 : \frac{sb^2R}{Sr^3} = \frac{1968064800}{15,051}.$$ *Quartus terminus reperitur* = 130759737, *& exprimit quadratum temporis in minutis secundis computati, quo bini globi uno se utrinque pede accedunt: proinde tempus erit proxime* 11435″, *quod superat horas tres.*

CAPUT V.

De Vero mundi Systemate.

Uti Systema quodvis ex collectione, ordine ac nexu plurium illud constituentium coalescit: sic genuina, ac distincta systematis cognitio non nisi ex cognitionibus singularum partium, ordinis, ac nexus earundem exsurgit. Quapropter siquis recte percepit, quæ de situ ac motu siderum, de mutuis viribus, ac phænomenis inde pendentibus exposita sunt, in ferendo de veritate systematis judicio haud magnopere loborabit. Quod igitur instar hypothesis primo assumsimus, id ad veram thesin transferri debere nunc ostendemus, ita, ut primo physica argumenta, atque ex ipsa natura, & legibus naturæ petita simus commemoraturi: postea vero, quid respondendum sit auctoritate sacrorum codicum utentibus contra systema terræ motæ, perquisituri simus haud perfunctorie, eum maxime in finem, nequi homines imperiti, & moleste pii atque anxii celeberrimos nostræ ætatis astronomos & mathematicos, viros bonos, ac veritatis studiosos, reiquæ physicæ amplificandæ intentos, cum terram moveri reipsa statuunt, temere judicent, & condemnent ceu negligentes divinæ auctoritatis, & in invidiam apud plebem, & vulgus literatorum vocent; qua quidem re multo gravius certiusque contra naturalem caritatis legem peccant, quam ii, qui retento systemate teræ motæ verbis scripturæ commodam, aptamque interpretationem adhibere conantur.

§. CCCLII.

Propositio I. *Systema terræ motæ pro vero, ac genuino systemate, quod reipsa obtinet in natura, tenendum est.* Ostenditur. Sine dubio illud præ cæteris systema pro vero ac genuino tenendum est, quod cum uni-

univerſali ac perpetuo operandi modo, & velut nativa indole totius naturæ: quodque cum generalibus eiusdem legibus, & cum peculiaribus phænomenis ita conſentit, ut oppoſitum ſyſtema cum his omnibus minime conciliari queat. Atqui ſyſtema terræ motæ cum operandi modo & indole totius naturæ, cum legibus eiusdem & peculiaribus phænomenis ita conſentit, ut ſyſtema terræ quieſcentis cum his conciliari haud queat: igitur ſyſtema terræ motæ pro vero ac genuino ſyſtemate, quod reipſa obtinet in natura, tenendum eſt. Singula propoſitionis aſſumtæ membra deinceps exponemus.

§. CCCLIII.

I. *conſenſus ſyſtematis terræ motæ cum univerſali, ac perpetuo operandi modo, & velut nativa indole totius naturæ.* Operandi modus, ac indoles naturæ maxime in ſimplicitate ſita eſt; id quod §. I. ceu princeps philoſophandi lex, a me fuit expoſitum: Natura enim nihil agit fruſtra: nec rerum ſuperfluis cauſſis luxuriat; dicunt utique philoſophi: fruſtra fit per plura, quod fieri poteſt per pauciora. In ſyſtemate terræ quieſcentis, fruſtra, id eſt, ſine ſufficiente ratione, & contra naturæ ſimplicitatem plura ſtatuuntur centra motuum cæleſtium, nimirum terræ, quæ ſit centrum motus lunæ, ac ſolis, imo innumerabilium ac vaſtiſſimorum ſolium nempe omnium fixarum: dein ſol tanquam centrum reliquorum planetarum, cometarumque. Siquis numerum, diſtantiam, vaſtitatem tot ſolium ſive fixarum comparet cum parvitate noſtræ telluris; nunquam inducet animum, tot tantaque corpora tantis intervallis diſſita circa punctum aliquod, quale terra noſtra reſpectu horum corporum recte habetur, intra 24 horas celeritate incredibili converti. At in ſyſtemate terræ motæ ſimpliciter ac plane contingunt omnia; ſi enim terræ tribuuntur legitimi motus, ii motum adparentem inducunt in omnes fixas, cometas, planetas. Ac *primo* ob motum *diurnum* terræ ab occaſu in ortum circa proprium axem, qui fit tempore $23^{h}.\ 56'.\ 4''$. omnia extra tellurem ſita adparent motu contrario tranſlata

ab

ab oriente in occidentem circa eundem axem, quem productum concipimus usque ad immenſæ ſphæræ ſuperficiem; qui axis cum ſit inclinatus ad planum eclipticæ, aſtra omnia diurno motu adparent translata ab oriente in occidentem in circulis inter ſe parallelis ſed inclinatis ad planum eclipticæ. Sola igitur axis terreſtris libratione motus diurnus innumerabilium, maximorumque corporum circa tellurem noſtram tollitur. *Secundo*. Si terra inſtar alterius planetæ e. g. Martis vi projectionis & gravitatis in ſolem circa eundem movetur (qui dicitur *motus annuus* telluris) apertiſſime intelligitur, cur ſol motu annuo in ecliptica videatur moveri. Si enim reipſa terra movetur in ecliptica, locus geocentricus ſolis, ſive is, in quo ſol e terra viſus conſpicitur, ſemper & neceſſario oppoſitus eſt telluri loco heliocentrico, ſive loco, quem terra occupat e ſole viſa. Hinc uti annuo motu hic telluri locus mutatur; ita pariter mutatur & ille; ac ſol nobis videtur deſcribere ellipſin æqualem illi, quam terra deſcribit circa ſolem, ſed poſitam ſitu, contrario ita ut terra in principio arietis exiſtente ſol adpareat in libra, eaque per 30 gradus ad taurum progreſſa, ſol in ſcorpione conſpiciatur; atque ita porro. cumque ſol non in centro, ſed in foco ellipſeos a terra deſcriptæ verſetur, ac telluris motus ſit inæquabilis; intelligi poteſt, cur ab æquinoctio verno ad autumnale plures ſint dies, quam ab hoc ad æquinoctium vernum; ſol igitur longiore tempore in ſignis borealibus, quam auſtralibus conſpicitur, propterea quod terra in his longiore tempore verſetur, tardiusque incedat, quam in illis. Diſcrimen temporis æſtivi ab hyberno eſt 8 dierum. *Tertio*. Quoniam axis terræ in ecliptica progredientis proxime parallelus manet ſecluſis perexiguis motuum perturbationibus, idemque ad eclipticam eſt inclinatus, viciſſitudines tempeſtatum, quas obſervamus, & incrementum, ac decrementum dierum, noctiumque neceſſario conſequuntur. Sit enim (F. XIX.) Sol in S; circa quem in orbita elliptica periodum annuam conficiat tellus. Sit huius axis P p, qui in diverſis orbitæ punctis ſibimet maneat parallelus: P ſit polus borealis, & p auſtralis: æ q ſit æquator: C D,

E F circuli æquatori paralleli, alter respondens tropico cancri, alter tropico capricorni. Ponatur terra insigno libræ ♎; adparebit sol in ariete ♈ principio veris, & in ipso æquatoris æ q plano, & illuminabit hemisphærium P q p. Si iam terra in eo situ rotetur circa axem P p, dies noctibus ubique terrarum æquabuntur. Terra progrediente in signum capricorni ♑ sol conspicietur in solstitio æstivo, & signo cancri ♋, simulque ad perpendiculum incumbet tropico cancri in D, ac collustrabit hemisphærium m P n, diesque versus boream longissimos, versus austrum brevissimos efficiet; quod facile intelligitur, si tellus in eo situ concipiatur converti circa axem P p. Hinc digressa tellure in signum ♈ sol videbitur in signo libræ ♎, & æquinoctio autumnali, in quo, perinde ut in verno, dies noctibus æquales erunt. Demum si attingit signum cancri ♋, adparebit sol in signo opposito capricorni ♑, & solstitio hiberno, cumque in ea positione ad perpendiculum incumbat tropico australi in C, versus polum australem dies longissimos atque æstatem, versus borealem brevissimos, & hiemem efficiet. *Quarto* denique in Systemate terræ motæ haud ægre intelligitur, cur in tellure versantibus nobis planetæ tam superiores, quam inferiores nunc directe progredi in orbita, nunc stare aliquamdiu nunc etiam contra seriem signorum regredi videantur, etsi iidem reipsa semper directi sint. Neque eorum orbitæ in varias complicatasque spiras, uti in systemate terræ quiescentis, conformandæ sunt. Eiusmodi adparentes stationes, & retrogradationes planetarum generatim pendent ex combinatione motus, quem habent circa solem, cum motu, quo tellus nostra circa eundem transfertur; cum enim tellus longiore tempore, quam inferiores planetæ, ac breviore quam superiores periodum annuam conficiat, eosdem nunc præcedit, nunc sequitur, ac vario respectu eorum situ nunc ad hoc, nunc ad aliud cæli punctum refert. Quæ quidem res obvio schemate passim demonstrari solet.

S.

§. CCCLIV.

II. *Conſenſus ſyſtematis terræ motæ cum generalibus legibus naturæ.* Legem attractionis mutuæ, & univerſalis, itemque Keplerianas regulas in toto ſyſtemate ſolari obtinere, tot tantisque argumentis conſtat, ut de ea re nemo peritus dubitare iam queat. Quid igitur? ſolane tellus hac gravitate carebit, tellus inquam, noſtra, in qua eandem reipſa præſto eſſe, maris æſtus luculentiſſime demonſtrat? ſi autem tellus in planetas, & in ſolem maxime attrahitur; qua ratione eidem vis proiectionis denegabitur, quæ in ſyſtemate copernico - Newtoniano ne a ſole quidem abeſſe poteſt? Si terravi proiectionis caret, & in ſolem gravitat; quid retinet eandem, quo minus dudum in ſolem delapſa ſit? quis non videt; aut convellendam eſſe attractionis legem, quæ experientia & matheſi, id eſt, firmiſſimo, & inconcuſſo fundamento nititur; aut terræ motum annuum eſſe tribuendum. Regula Kepleriana tertia, vi cuius quadrata temporum periodicorum in corporibus circa idem centrum revolutis, ſunt ut cubi diſtantiarum, quas habent ſingula ab eodem centro, omnino generalis eſt, & perinde a planetis ſecundariis reſpectu ſui primarii, quam a primariis reſpectu ſolis obſervatur. Hæc autem regula ſublato motu annuo terræ invita natura tollitur. Moveatur enim non modo luna, verum ſol quoque circa terram, ſitque tempus periodicum lunæ = 27 dies; eius quadratum 729; tempus periodicum ſolis 365 d. Quadratum 133225. Diſtantia lunæ a terra 60 ſemid. Fiat ſecundum regulam Keplerianam: ut quadratum temporis periodici lunæ (729) ad quadratum temporis periodici ſolis, (133225) ita cubus diſtantiæ lunæ a terra (216000), ad cubum diſtantiæ ſolis 39474074; cuius radix ipſam ſolis diſtantiam exhibeus nequidem 350 ſemidiametros efficit; cum tamen diſtantia ſolis ultra 20 millia ſemidiametrorum aſcendat. Similiter ſi aſſumta ſolis diſtan. = 20000, & diſtantia lunæ = 60 ſemid. & huius tempore periodico = 27 d. quæratur ſecundum regulam Kepleri tempus periodicum ſolis; id eiusmodi reperi-

ritur

rior, quod a veritate longissime abhorret; fiat enim: ut 216000 ($= 60^3$) ad 8000000000000 (20000^3) ita 729 (27^2) ad quadratum temporis periodici solis $=$ 27000000000; cuius radix exprimens tempus periodicum solis in diebus computatum proxime est $=$ 164316; quod ultra 450 annos efficit. Patet igitur, quantopere systema, vel potius hypothesis terræ quiescentis, & solis circa terram moti a generalibus naturæ legibus alienum sit; contra motum terræ instar alterius planetæ primarii gyrantis circa solem cum iisdem penitus consentire, supra demonstratum abunde est.

§. CCCLV.

III. *Consensus systematis terræ motæ cum peculiaribus phænomenis naturæ. Peculiaria phænomena* appello, quæ Astronomia adcuratius exculta primum detecta sunt, vel quorum explicationem desperavit antiquitas. Cuiusmodi sunt *primo* adparentes quidam Fixarum motus, qui a præcessione æquinoctiorum, & nutatione axis terrestris pendent, & cum motu terræ ac systemate attractionis connexi sunt. *Secundo* perturbationes motus planetarum, uti motus nodorum, apheliorum &c. qui explicatum non habent, nisi etiam telluri vis attractiva concedatur. *Tertio* inæqualitates lunæ, quæ cum nulla hypothesi ab astronomis ante excogitata complanari potuerit, sola attractionis lege certis calculi legibus adstringuntur. *Quarto* æstus maris, cuius explicationem cum infeliciter, & plane irrito conatu ante Newtonum inquisiissent Philosophi, ipsi Philosophiæ, ut Mac-laurinus inquit, imbecillitatem exprobrare videbantur; sed quæ ab illustri hoc viro ex inæquali gravitatione partium terræ in lunam ac solem summa cum evidentia deducta est. Deprehensa autem hac terræ gravitate in solem & lunam, quo iure, aut quo doctrinæ ordine eiusdem motus annuus negari, vel etiam in dubium vocari possit, haud sane video. *Quinto* denique inter peculiaria phænomena maxime censenda est aberratio annua fixarum, quæ non nisi in systemate terræ motæ aptam & cohærentem rationem habet. Deprehensæ nimirum sunt in stellis fixis diversis

anni

anni temporibus obſervatis quædam loci mutationes, quarum explicationem, & theoriam ex ſucceſſiva luminis propagatione, & motu annuo terræ Bradleius prodidit cum phænomenis mirum in modum conſentientem. Feratur (F. XX.) radius ad A directione LPA; & ſit BA ad PA, ut eſt celeritas oculi ad celeritatem luminis, ut BA ſpatium ſit confectum ab oculo, PA ſpatium intra idem tempus confectum a radio. Ducta PQ parallela & æquali rectæ BA compleatur parallelogrammum BAPQ. Motus PA radii reſolvetur in PQ & PB, vel QA; prior motus PQ; cum ſit æqualis & parallelus motui ſpectatoris BA, percipi non poteſt; Sola igitur celeritas radii per QA expreſſa ſenſibilis evadet, ita ut radius ad oculum ſpectatoris ex B in A delati pertingat directione QA. Unde is ſidus, cuius radium percipit, ad extremitatem lineæ AQ referet, idque in O exiſtere iudicabit. Diſtantia directionis veræ radii a directione viſa, erit angulus LAO, qui *angulus aberrationis*, vel *aberratio luminis* dicitur, & aliquando ad 20 minuta ſecunda pertingit. Quam certum eſt hoc aberrationis ſiderum phænomenon; tam apte, arcteque cum motu annuo terræ id cohærere conſtanter deprehenditur.

Hæc ſunt momenta ſyſtematis terræ motæ; quod copernicanum *vulgo dicitur: rectius* copernico-Newtonianum *vocatur. Copernicus enim ſolem fixit immotum in centro: Newtonus huic quoque vim proiectionis tribuit, ſed quæ ſenſibilem mutationem poſitionis vix inducere valet, cum centrum commune gravitatis a ſolis centro haud longe abſit. Argumenta phyſica, quæ contra telluris motum allata ſunt, tam parum ponderis habent, ut ea vel recenſere prope pigeat. Aiunt: ſi terra circa axem volvitur in ortum, nubes viderentur contraria directione ferri in occaſum: aves ex nidis avolantes tellure interea converſa eosdem poſtea reperire haud poſſent. At enim is motus omnibus corporibus in eius ſuperficie poſitis, ipſique atmoſphæræ ambienti, ac nubibus vel avibus in ea exiſtentibus communis eſt, neque comparativum eorum corporum ſitum immutat: uti in ſole contingeret, ſi moveretur eo, quo Tychonici volunt, modo; atmoſphæra enim una cum nubibus ſeu maculis circa axem convertitur eodem,*

quo

quo massa solaris, tempore. 2. *Si terra in orbe annuo incedens ad quasdam fixas nunc prævius accedit; alias longius recedit; cur eæ in minore distantia non maiores, in maiore non minores, adparent? R. quia tanta est fixarum distantia, respectu cuius etiam diameter orbitæ terrestris evanescit.* 3. *Hæc distantia, quæ fixis tribuitur, plane enormis est, & supra fidem. R. iis, qui contemplatione naturæ, diligenteque studio extenderunt ideas suas, & cogitandi vim, haud enormis, multo etiam minus incredibilis videtur ea fixarum distantia, quanta quanta est, nec vero angustis limitibus phantasiæ res constringendæ sunt; sed secundum experientiæ, & rationis normam dimetiendæ. Porro cum experientia, & ratiociniis inde deductis plane consentit vastitas illa cælestium spatiorum, & magnitudo distantirum, queis stellæ fixæ a nobis removentur. Sed nulla est hæc distantia ad immanem celeritatem, quam innumerabilibus sideribus tribuunt, qui terram, quam incolunt, quietam volunt.* 4. *Si terra agitur in orbem, corpora in superficie posita, ipsique homines ob vim centrifugam in spatia inania excuti deberent. R. multo maior vi centrifuga vis gravitatis est (§. CCLXXVI. n. X.) Hæc quidem omnia, quæque sunt generis istius, systemati terræ motæ nihil officiunt: magis obstant præiudicia infantiæ, ac sensuum. Fac hominem in vasta navi, & æquabiliter citra concussionem progrediente natum, educatumque esse, qui nunquam ad obiecta in litore vel continenti posita antea oculos converterit; profecto haud facilius ei persuadebis, hanc navim, seque una moveri, quam alium sensibus suis quidvis metientem inducas, ut se una cum tellure, in qua degit, revolvi assentiatur. Reliquum est, ut de auctoritate sacri codicis, quatenus ad institutum pertinet, differamus.*

§. CCCLVI.

Propositio II. *Neque ex fine S. scripturæ, neque ex verbis eiusdem in se spectatis, vel prout iacent, neque ex ullis adiunctis vel circumstantiis quidquam legitime concludi posse pro motu solis, & quiete terræ videtur.*

I.

I. *Finis S. ſcripturæ*, ac divinæ revelationis haud erat, ut Philoſophiam, ac Matheſin inſtructore ſpiritu Sancto, ſed ut dogmata religionis, morumque integritatem doceremur. Id S. Auguſtinus locis pluribus exponit, inprimis L. II. de Geneſ. ad literam c. 8. *quæri etiam ſolet, quæ forma, & figura cæli credenda ſit ſecundum ſcripturas noſtras. Multi enim multa diſputant de iis rebus, quas maiore prudentia noſtri Maiores omiſerunt, ad beatam vitam non profutura diſcentibus, & occupantes, quod peius eſt, multum pretioſa, & rebus ſalutaribus impendenda temporum ſpatia. Quid enim ad me pertinet, utrum cælum, ſicut ſphæra undique concludat terram in media mundi mole libratam; an eam ex una parte deſuper velut diſcus aperiat? - - - breviter dicendum eſt, de figura cali hoc ſciſſe auctores noſtros* (ſacros intelligit, & a Deo inſpiratos) *quod veritas habet, ſed ſpiritum Dei, qui per ipſos loquebatur, noluiſſe iſta docere homines nulli ſaluti profutura.* Animadverte, Auguſtinum teſtari, maiores ſuos, id eſt, Patres antiquiores, & Præſules eccleſiarum, qui conſervandæ puritati fidei, ac morum certe omni ſtudio incumbebant, iſtiusmodi res naturales haud examinaſſe; nec vero id eorum muneris eſſe. Imo idem S. Doctor aperte, ac ſollicite monet, ut ad probandas res naturales, vel impugnandas verba divini codicis temere non adhibeantur, ne eadem aliorum ludibrio exponantur. Eodem L. c. 18. inquit: *in rebus obſcuris, atque a noſtris oculis remotiſſimis, ſiqua inde ſcripta etiam divina legerimus, quæ poſſint ſalva fide, qua imbuimur, alias, atque alias parere ſententias, in nullam earum nos præcipiti adfirmatione ita proiiciamus, ut ſi forte diligentius diſcuſſa veritas eam recte labefactaverit, corruamus: non pro ſententia divinarum ſcripturarum, ſed pro noſtra ita dimicantes, ut eam velimus ſcripturarum eſſe, quæ noſtra eſt: cum potius eam, quæ ſcripturarum eſt, noſtram eſſe velle debeamus.* Sequenti capite, quas res *obſcuras* denotat, explicat: *Plerumque accidit, ut aliquid de terra, de cælo, de cæteris huiusmodi mundi elementis, de motu & converſione, vel etiam magnitudine, & intervallis ſiderum, de certis defectibus ſolis & lunæ, de circuitibus annorum, & temporum, de naturis animalium, fruti-*

cum,

cum, lapidum, atque huiusmodi cæteris, etiam non Christianus ita noverit, ut certissima ratione, vel experientia teneat. Turpe autem est nimis, & perniciosum, ac maxime cavendum, ut Christianum de his rebus, quasi secundum christianas literas loquentem ita delirare quilibet infidelis audiat, ut, quemadmodum dicitur, toto cælo errasse conspiciens, risum tenere vix possit. Et non tam molestum, quod errans homo deridetur, sed quod nostri auctores ab eis, qui foris sunt, talia sensisse creduntur, & cum magno eorum exitio, de quorum salute satagimus, tanquam indocti reprehenduntur, atque respuuntur. Cum enim quemquam de numero Christianorum in ea re, quam optime norunt, errare deprehenderint, & vanam sententiam suam de nostris literis asserere; quo pacto illis libris credituri sunt de resurrectione mortuorum, & de spe vitæ æternæ, regnoque cælorum, quando de iis rebus, quas iam experiri, vel indubitatis numeris percipere potuerunt, fallaciter putaverint esse conscriptos. Quid enim molestiæ, tristitiæque ingerant prudentibus fratribus temerarii præsumtores, satis dici non potest; cum, si quando de prava, & falsa opinione sua reprehendi, & convinci cæperint ab iis, qui nostrorum librorum auctoritate non tenentur, ad credendum id, quod levissima temeritate, & apertissima falsitate dixerunt, eosdem libros sanctos, unde id probent, proferre conantur.

§. CCCLVII.

II. *Verba S. scripturæ in se spectata, vel prout iacent*, vulgari loquendi modo, & captui vulgi sunt adcommodata. Nihil igitur ex nuda litera legitime concluditur, ac multis exemplis illud comprobari potest. Nam 1. in S. codice Deo tribuitur corpus, membra, animi perturbationes, operationes humanæ: brutis intelligentia, spiritibus aliis sensus. 2. Prædicuntur stellæ de cælo lapsuræ; alludendo ad ea, quæ adparent: neque enim in terram plures stellæ possunt cadere, cum omnes fere magnitudine terram superent. Fortassis ea, quæ in epist. S. Judæ c. 1. v. 13. dicuntur *sidera errantia*, sidera non sunt, sed meteora, & inflammationes atmosphæræ. 3. S. Thomas I. P. Summæ Q. 70. Art. 1.

1. ad 3. de motu sphærarum ait : *Moyses rudi populo condescendens sequutus est , quod sensibiliter adparet.* 4. Dionysius Petavius (cuius viri quanta auctoritas sit, ii duntaxat ignorant , qui nullas pæne novere disciplinas) in Præf. ad libros de Opificio 6. dierum , antequam ad explicandam rerum creationem adgreditur , duplicem cautionem , ac regulam sibi præscribit : *Primo Rerum olim reipsa , vereque gestarum historiam in Moysis enarratione contineri : non allegoriis adumbratos , & involutos nescio quos sensus spiritualium rerum , corporeque carentium. Secundo in iis ipsis naturalibus & corporeis exponendis rebus Moysen rudis hebetisque populi ad captum , & ingenium temperavit stilum.* Infra idem repetit : *Hæc mea perpetuo sententia fuit , omnia fere , quæ hic Moyses attigit , popularem ad usum esse loquendi , intelligendique demissa.*

§. CCCLVIII.

III. *Circumstantiæ* nullæ sunt, ex quibus coniectura fieri queat, divinum spiritum de quiete vel motu solis quidquam significare hominibus ex instituto , vel ultra captum vulgi voluisse. Id palam fiet ex ipsis verbis S. codicis.

Primo L. Jos. c. 10. v. 13. ingens prodigium narratur , quod ad preces & prope ad imperium Josue contigit, obediente Deo voci hominis ; dixerat enim : *sta sol ; steteruntque sol & luna. - - - Stetit itaque sol in medio cæli , & non festinavit occumbere spatio unius diei.* Si Josue Astronomus , si Copernicanus , si Newtonianus extitisset , profecto haud aliter fuerat loquuturus , quam reipsa loquutus est. Quid igitur ex eius verbis contra Astronomos , Copernicanos , Newtonianos efficies ? Ipsi Astronomi , qui de motu terræ certam , exploratamque cognitionem habent , tamen ortum solis, occasum , declinationem versus Boream & Austrum & quæ sunt istius generis, sæpissime in ore habent , idque ipsum in Tabulis & Ephemeridibus exprimunt. *Quanto igitur minus* , Keplerus inquit in Epit. Astron. ad

fin. L. I. *exigendum erit a ſcripturis divinitus inſpiratis, ut repudiata vulgari loquendi conſuetudine, verba ſua ad ſcientiæ naturalis amuſſin adpendant, abſtruſisque & importunis loquutionibus, de rebus ultra captum erudiendorum, populum Dei ſimplicem perturbent, eaque re viam ipſis ad ſcopum ſuum genuinum longe ſublimiorem interſepiant.*

Secundo. Eccli. I. *Generatio advenit, generatio præterit: terra autem in æternum ſtat. Oritur ſol, & occidit, & ad locum ſuum revertitur, ibique renaſcens gyrat per meridiem, & flectitur ad aquilonem: luſtrans univerſa in circuitu pergit ſpiritus, & in circulos ſuos revertitur. Omnia flumina intrant in mare, & mare non redundat. Ad locum unde exeunt, flumina revertuntur, ut iterum fluant.* Agitur hoc loco de fluxo & caduco rerum mundanarum ſtatu; ac primo velut theſis ſtatuitur: omnia, quæ ab hominibus in hoc mortalitatis ſtatu quæruntur, & amantur, tranſeuntia ſunt, & caduca, & penitus vana: *vanitas vanitatum, & omnia vanitas*, id eſt, *maxima* eſt vanitas rerum in hoc ſtatu. Hæc theſis deinde inductione & enumeratione rerum ſingularium illuſtratur, ac primo ex ſucceſſione generationum: generatio præterit: generatio advenit: terra autem in æternum ſtat: quaſi diceret: omnes generationes a mundi exordio adhuc præterierunt ſola terra manente, quam & progenitores noſtri pridem mortui incoluerunt; & nos pariter morituri nunc incolimus. Adpoſite Hieronymus in hunc locum: *Quid hac vanius vanitate, quam terram manere, quæ hominum cauſſa facta eſt: & ipſum hominem terræ dominum in pulverem repente diſſolvi.* Non igitur abſoluta telluris quies hoc loco indicatur, neque eius motus excluditur, ſed permanentia terræ ceu habitationis noſtræ opponitur perenni ſucceſſioni habitatorum eius. Dein Eccleſiaſtes theſin ſuam probat tum ex diurna mutatione dierum, & noctium, tum ex annua viciſſitudine temporum, veris, æſtatis, autumni, hyemis; dicitque: *Oritur ſol, & occidit, & ad locum ſuum revertitur, ibique renaſcens gyrat per meridiem, & flectitur ad aquilonem;* Scopus quidem ſacri concionatoris perinde obtinetur, ſive adparentem ſive verum

motum

motum ſolis intelligas; utroque enim modo viciſſitudo & mutatio rerum elucet. In Hebræo ſententia eſt iſtiusmodi: *ſol oritur & occidit, & ad locum ſuum anheus it.* Dictum poetice, cui affine eſt illud Catulli L. 2. *ſolis anhelantes abluit amnis equos.* Ea igitur ſpectatis omnibus adiunctis mens eſt Eccleſiaſtis, ut ex temporum mutatione mortalitatis nos commonefaciat, non ut de curſu ſiderum, & mundi ſyſtemate informet. In eandem ſententiam Plinius L. 2. C. 12. ait: *quis cernens ſtatos ſiderum labores, non ſuæ neceſſitati mortalis genitus ignoſcat.* Deinceps ait Eccleſiaſtes: *luſtrans univerſa in circuitu pergit ſpiritus, & in circulos ſuos revertitur.* Id ad ventos, eorumque directiones identidem mutatas non pauci referunt. Alii ad ſolem, de quo antea agebatur, adcommodant, qui cum luce & calore ſuo rebus vitam & quodam modo animum impertiatur, eo ſenſu ſpiritus dici poteſt præſertim ſpectata VV. opinione, qui aſtra animata exiſtimabant. Hinc Virgil. L. 6. Æneid. *lucentemque globum lunæ, titaniaque aſtra ſpiritus intus alit.* Aliud inconſtantiæ rerum argumentum aut ſymbolum ex lapſu fluminum petitur: *Omnia flumina intrant in mare, & mare non redundat: ad locum unde exeunt, flumina revertuntur, ut iterum fluant.* Ex philoſophis iis quoque, qui terram quietam faciunt, plerique docent, nequaquam ſic e mari exire flumina, uti intrant; ſed mare, aiunt, vaporibus materiem ſuppeditare, ex quibus in alias regiones per ventos avectis pluviæ, nives, glacies, ros & pruina exiſtant, quæ in hydrophylacia colligantur & fontes, ſcaturigines pariant. Dum in Hebræo legitur: *torrentes* in mare redeunt, indicatur præceps vitæ humanæ lapſus inſtar torrentis celeriter decurrentis: ea autem verba: *mare non redundat,* indicio nobis ſunt, terram maxima cadaverum ſtrage, quam excepit iam ſinu ſuo, & indies excipit, nunquam expleri poſſe. Concinne Auguſtinus in Pſal. 109 ait. *ſicut torrens pluviatilibus aquis colligitur, redundat, perſtrepit, currit, & currendo decurrit, id eſt, curſum finit: ſic omnis iſte mortalitatis curſus. Naſcuntur homines, & moriuntur: & aliis morientibus alii naſcuntur, ſuccedunt, accedunt, diſcedunt, nec manebunt.* Denique Eccleſiaſtes v. 8 ait: *cunctæ res difficiles, nec poteſt homo eas ex-*

 pli-

plicare sermone, q. d. In omnibus hisce naturalium rerum mutationibus, & iugi siderum, aeris, ventorum aquarum vicissitudine tanta inest obscuritas, ut vel doctissimus quisque ignorantiam suam sæpe fateri cogatur, & quo plura animo comprehendit, eo maiora sibi discenda esse cognoscat: *non satiatur oculus visu, nec auris auditu impletur.* Nempe istiusmodi res suo quisque ingenio studioque, non divina revelatione discere debet.

Tertio Psal. 92. *Firmavit orbem terræ, qui non commovebitur.* Psal. 103. *Fundasti terram super stabilitatem suam.* Istiusmodi verba duntaxat permanentiam telluris, ac durationem indicant, ut supra expositum est. Unde Prov. 8. v. 28 *æthera*, id est, cælos *firmavit sursum*, & scriptura *firmamentum cæli* sæpe commemorat; quod tamen ad præcipitem motum concitant, qui telluris motui repugnant. *De motu etiam cæli,* inquit S. Augustinus libro cit. c. 10. *non nulli fratres quæstionem movent, utrum stet, an moveatur: quia si movetur: inquiunt, quomodo firmamentum est? si autem stat, quomodo sidera, quæ in illo fixa creduntur, ab oriente usque ad occidentem circumeunt, septentrionibus breviores gyros iuxta cardines peragentibus? - - quibus respondeo, multum subtilibus & laboriosis rationibus ista perquiri, ut vere percipiatur, utrum ita, vel non ita sit; quibus ineundis atque tractandis nec mihi iam tempus est, nec illis esse debet, quos ad salutem suam & sanctæ Ecclesiæ necessariam utilitatem cupimus informari - -* Ecce! subtilibus, inquit, rationibus, non sententiis divinæ auctoritatis istiusmodi res perquirendæ sunt; nec eæ omnino ad sacrum tribunal pertinent. Adiungatur huic effato auctoritas S. Thomæ Theologorum Scholasticorum principis, nec magis divino ingenio, quam prudentia, & modestia ubique spectabilis. Opusc. 10. interrogatus de quibusdam articulis ad res physicas pertinentibus ait: *multum nocent talia, quæ ad pietatis doctrinam non spectant, vel asserere vel negare quasi pertinentia ad sacram doctrinam. - - - Unde mihi videtur tutius esse, hæc, quæ Philosophi communiter senserunt, & nostræ fidei non repugnant, neque sic asserenda esse ut dogma-*

ta

ta fidei, neque sic neganda, tanquam contraria, ne sapientibus huius mundi contemnendæ fidei occasio præbeatur. Eodem Opusc. art. 16. ait: spectato pondere telluris angelum eidem movendæ parem esse: nihilominus non posse terram ab eo ita moveri, ut universi ordo perturbetur: *quia nulla virtus creaturæ potest immutare ordinem principalium partium universi.* Addit: *Si autem quæritur de motu circulari, per quem dictus ordo non variatur, videtur, quod naturaliter terra quiescat, ut vult Philosophus in libris de cælo.* Ita terræ quietem probaturus S. Thomas non scripturarum loca, non Patrum sententias promit, sed lectores suos ad Aristotelem dimittit, hominem videlicet erroribus obnoxium, & astronomiæ physicæ penitus ignarum.

§. CCLIX.

Respondetur ad Obiectiones.

I. Aiunt: *Verba S. Scripturæ in sensu proprio accipienda sunt, nisi evidens ratio naturalis, aut Ecclesiæ interpretatio obsistat.* R. verissimum id quidem in rebus fidei & morum; At in aliis rebus naturalibus, astronomicis, geographicis, chronologicis, ut a proprio sensu recedamus, gravis, & valida ratio sufficit, præsertim si pondere suo hominem peritum convincat. De hac regula (verba scripturæ in sensu proprio accipienda sunt) cel. Auctor de moderatione ingeniorum in negotio religionis in hunc modum disserit L. I. C. 21. *Hoc tam latum, & generale axioma nescio quam opportune inculcetur. Certe quantum fieri potest, retinere & consectari debemus literalem proprium Scripturæ sensum. Verum prope innumera ibi sunt de rebus ad salutem non necessariis seu dicta, seu phrases seu verba, quibus neque fidei neque ecclesiæ placita neque naturalis lux palam repugnat; & tamen in sensu naturali ac proprio a SS. Patribus aliisque catholicis interpretibus non accipiuntur. Ut aliter ista explicentur, atque accipiantur, quam prima facie accipienda videantur, sufficit, ut id probabilior aliqua ac verisimilior ratio suadeat, petita e liberalibus disciplinis,*

 nis,

nis, & profanis historiis, e populorum moribus, aliisque etiam minus certis fontibus, & sit non violenta sed naturalis, atque in aliis similibus locis usitata, & probata interpretandi ratio. Si maxime proprio sensui inhærendum est, motum terræ ex ipso sacro codice denique quis eruet. Commemorat enim is non uno loco *cardines* terræ, quos græci πολους vocant, quod nomen relativum est, & rem versatilem ac mobilem sibi impositam proprie denotat. In Psal. 135 Deus *firmavit terram super aquas*, an igitur terra aquis incumbit? Iob. 37. cæli dicuntur *solidissimi quasi ære fusi*. Art. 27: circa mediam noctem suspicabantur nautæ adparere sibi aliquam regionem: in fonte græco extat *adpropinquare*; verene, an secundum adparentiam sensuum, uti fit in motu adparente solis? Sed pertexamus verba doctissimi Auctoris cit. loc. *Non ideo omnes scripturæ interpretationes reiiciendæ, quia demonstratione caret ratio ita interpretandi; alioquin de commentariis SS. PP. aliorumque interpretum actum esset, eandem interdum sententiam varie atque opposite in huiusmodi locis exponentium - - - copernicani systematis rationes, etsi nequaquam demonstrativæ sunt, eæ tamen sunt, quæ dubium faciunt scripturæ sensum - - quid si aliquando hæc demonstratio a sollertibus Astronomis, & Philosophis adinveniretur? nonne tum certum foret, interpretationem propositam non solum tolerabilem, & æquam, sed etiam necessariam esse; At quis non videat, periculosissimum, atque a religionis ecclesiæque institutione alienum esse, velle id nunc pertinere ad fidem, quod cras pertinere non possit? fides, atque stabilitas credendorum in ecclesia Christi, absit, ut ab humanis experimentis pendeat.*

II. Patres & Ecclesiæ Doctores verba scripturæ de motu solis, & quiete telluris interpretati sunt. R. Patres res ex instituto haud examinasse testis locupletissimus est S. Augustinus, cuius verba supra recitavi. Sed audiatur denuo Auctor de mod. Ingen. in negotio religionis: *Nescio, quo plausu excipiendi sint illi, qui in Physicis, in historiis profanis & huiusmodi argu-*

mentis

mentis Augustinum, Thomam, Bonaventuram, aliosque sanctitate simul & eruditione celebres viros producunt, rati, se istorum auctoritate firmissimum suis sententiis comparasse præsidium. At sancti Patres in hisce artibus humanis ac scientiis non Christum, sed Platonem, sed Avincennam, homines videlicet impios aut cæcos habuere magistros, aut suum intellectum fallacem, aut alios homines erroribus obnoxios sequuti sunt. Quid ergo hic certi a SS. Patribus polliceri tibi possis? tantum sane eorum dicta valebunt apud cordatos viros, quantum rationibus, & robustissimis neque fallacibus argumentis nitentur. Præterea non hoc suæ Ecclesiæ, non conciliis, SS. Patribus dedit Christus, ut populum fidelem astronomum facerent, physicesve, chronologiæ, historiæ profanæ, rerumque similium sine ullo errore peritum. In Crucifixi schola satis est docere, satis ediscere, quæ vere de religione credenda, quæ pie facienda sunt, ut ametur Deus, cælorumque regnum vi beatissima tandem rapiatur. Similia ante cit. auctorem scripsit Melchior Canus L. VII. loc. Theol.

III. Sententia de motu terræ pridem damnata est auctoritate ecclesiastica; & Galilæus iussus est eam revocare. R. Prohibita ea fuit nempe illo tempore, quo homines ob libidinem novandi etiam res fidei, sacris scripturis turpissime abusi sunt. Hinc cum systema Copernicanum haud satis congruere cum iisdem videretur, id satis erat, ut quorundam ardor contra eius defensores excandesceret præsertim quia Copernicani eius ætatis nondum in promptu haberent rationes tam validas, & convincentes, quas Newtoniani ex analogia, legibus & phænomenis naturæ hodie adferunt. Nec tamen prætereunda sunt verba Copernici ipsius in Præf. Operis sui ad Paulum III. P. M. ita differentis: *Quamvis sciam, homines Philosophi cogitationes esse remotas a iudicio vulgi, propterea quod illius studium sit, veritatem omnibus in rebus, quatenus id a Deo rationi humanæ permissum est, inquirere; tamen alienas prorsus a rectitudine opiniones fugiendas censeo. Itaque cum mecum ipse cogitarem, quam absurdum acroama existimaturi essent illi, qui multorum seculorum iudiciis hanc opi-*

nionem confirmatam norunt , quod terra immobilis in medio cœli tanquam centrum illius posita sit , si ego contra assererem , terram moveri ; diu mecum hæsi , an meos commentarios in eius motus demonstrationem conscriptos in lucem darem. - - - Si forte erunt ματαιολογοι *, qui cum omnium mathematum ignari sint ; tamen de illis iudicium sibi sumunt propter aliquem locum scripturæ male ad suum propositum detortum , ausi fuerint meum hoc institutum reprehendere , aut insectari : illos nihil moror , adeo , ut etiam illorum iudicium tanquam temerarium contemnam. - - - - Mathemata Mathematicis scribuntur.*

§. CCCLX.

Scholion Generale.

Plurima sunt , quæ in hanc sectionem atque adeo omnem mechanicam terrestrem , & cælestem adnotari queunt digna sane diligente animadversione , nec ea levis momenti ad naturæ cognitionem augendam , & excolendam mentem, regulasque philosophandi explicandas , & stabiliendas ; sed arcti limites operi nostro præfixi manum de tabula removere iubent ; Hinc factum est , uti etiam Caillius inquit in animadversionibus ad systema physicum Astronomiæ , *ut nihil adferremus de diversis systematis mundi , quæ vel* Ptolomæi *; vel* Tychonis *nomine celebrata sunt , quæque nostris temporibus vix alibi locum merentur , quam ut in historiam de diversis hominum opinionibus referantur.* Quæ de sacra auctoritate disputata sunt , cum iis conferantur regulis , quas in Logica de criterio auctoritatis exposuimus. Nam prudentis , ac literati viri est , diligenter investigare , utrumne ita perspicua sint , & extra controversiam posita sacræ scripturæ verba , ut contra regulas Logices , & genuinæ critices , ac contra germanæ interpretationis canones peccetur , siquis systema terræ motæ tueri velit. Copernici quidem opinio vix ab hypothesi differebat : sed quæ Newtoniani de illa re adferunt , ipsius veluti ministerio naturæ

turæ didicerunt. Inſcitæ plebeculæ, & ſenſuum atque auctoritatis præiudiciis innutritis hominibus ægre perſuaderi poterit, terram moveri; nec ſane ad æternam ipſorum ſalutem, vitamque recte agendam ullo pacto id neceſſarium eſt.

II. De Lege gravitatis univerſalis ac mutuæ Caillius loc. cit. ait: " *Conſenſus admirandus inter*
„ *omnia phænomena cæleſtia, & calculos ex hac lege*
„ *deductos, Aſtronomos impulit, ut eum tanquam fun-*
„ *damentum reciperent. Ex hac enim lege infertur,*
„ *corpora omnia nos ambientia debere motu accelerato*
„ *directione ad ſuperficiem telluris perpendiculari deſcen-*
„ *dere: ex hac diſcimus, cur luna circa terram volva-*
„ *tur: e combinatis diverſis variationibus, quas mutuæ*
„ *ſolis, terræ, & lunæ actiones pro diverſo ſitu effi-*
„ *ciunt, eo tandem pertigimus, ut lunæ inæqualitates*
„ *omnes certis calculi legibus ſint adſtrictæ. Nulla hy-*
„ *potheſis, quæcunque adhuc ab aſtronomis excogitata*
„ *fuit, motus lunares certis regulis ſubiicere potuit.*
„ *Ex hac eadem lege Saturnus, & Jupiter, aliorum*
„ *planetarum comparatione corpora ingentia, ſuis inæ-*
„ *qualitatibus ſunt obnoxii, lunaribus analogis, tum*
„ *pro diverſo ſitu inter ſe, tum ſolis reſpectu. Deni-*
„ *que huic legi debetur non modo ſumma accuratio in*
„ *calculo motus planetarum, verum etiam vera cometa-*
„ *rum theoria, ad quam ante Newtonum Aſtronomo-*
„ *rum nemo ne quidem prope acceſſit; ita, ut perfe-*
„ *ctioni aſtronomiæ iam vix aliud optari queat, quam*
„ *obſervationes a Veteribus relictis accuratiores, quibus*
„ *regulæ ex hac lege deductæ ſecure adplicari poſſint,*
„ *indeque elementa vera aſtronomica theoriæ cuiusvis*
„ *corporis cæleſtis conſtitui. Quoniam itaque omnia*
„ *corpora cæleſtia huic legi ſubiecta ſunt, manifeſtum*
„ *eſt, ea debere eſſe in perpetuo quodam motu, & agi-*
„ *tatione, ut ei, quantum poſſunt, obſequantur. Sol*
„ *ipſe locum quovis momento mutare cogitur, ut tali*
„ *conſiſtat ſemper, quo planetis in orbitis excentricis cir-*
„ *ca eum gyrantibus ſit, quam fieri poteſt, maxime*
„ *propinquus. Verum ingens eius moles, & diſtantia*

 ſal-

„ *saltem nobis hunc motum reddunt imperceptibilem.* „ *eadem conformitas inter hanc legem , & cœlestia phæ-* „ *nomena ad hanc nos deducit veritatem , cui in syste-* „ *mate physico non minus locus dandus est : nempe me-* „ *dium , in quo corpora cœlestia moventur , nihil eis* „ *resistere , quod sentiri possit. Difficultas in assignan-* „ *do huius legis principio vere physico , quin in ea* „ *conciliandа cum idea , quam velut natura duce habe-* „ *mus , ut existimemus , omnem motum fieri per impul-* „ *sionem , Philosophos inter se se scidit. Alii eam* „ *tanquam absolute cum impulsu pugnantem reiiciunt ;* „ *alii velut a Deo materiæ auctore primitus constitutam* „ *admittunt , & attractionem adpellant. Rectius quis* „ *fecerit , si , ut innumeris commodis , quæ hæc lex ad-* „ *fert , fruatur , eam ex inductione omnium phænome-* „ *norum cœlestium , nullo prorsus contrario , amplecta-* „ *tur interea , dum seu caussa physica , seu lex vera ,* „ *cui hæc adeo congruit , detegatur.* „ Consilium viri doctissimi sequutus nihil de natura attractionis , virium attrahentium , & primorum elementorum hoc quidem loco disputo ; quia dispiciendum est antea , quænam præterea virium genera , quæve leges virium extent in natura. Iis indagatis omnem illam controversiam unum in locum congeram. Interea attractio instar phænomeni ad certam legem reducti , aut instar generalis legis spectari a quovis potest.

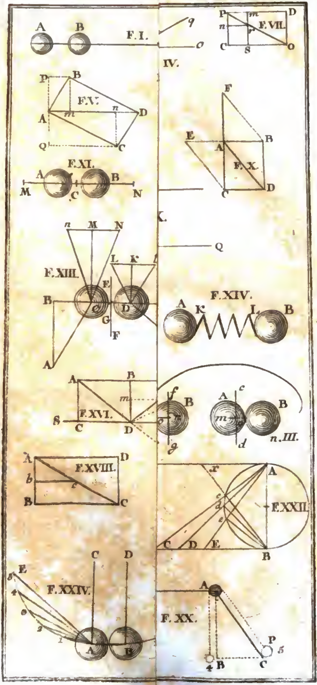
III. Adieci sub finem tabellas geminas , quæ Systema solare , tum particularia systemata Iovis , Saturni , terræ item ac lunæ exhibent. Pleraque ex Cel. Hellio desumsi : rationem axium maiorum , minorum , & excentricitatis ex Caillio , assumto axi maiore ellipseos a terra descriptæ pro communi scala in partes 20000 divisa. Rationem massarum , densitatum , ac gravitatum diversarum in superficie corporum totalium ex Boscovichio exscripsi. Magna hic varietas numerorum apud varios auctores occurrit , quæ sæpe ex parva elementorum calculi differentia nascitur. Sed ad scopum meum satis erat propinqua ratione quadam totam harmo-

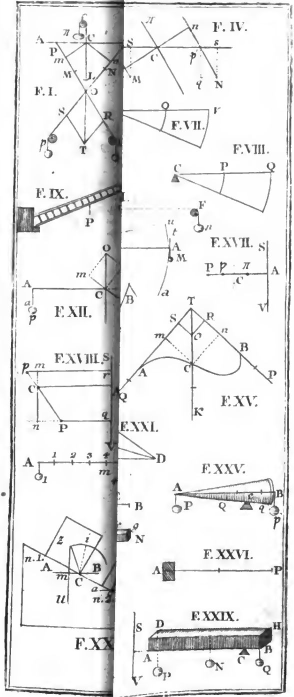
niam

niam ſyſtematis ſolaris uni velut obtutui ſubiicere. Modum determinandi maſſas corporum, circa quae alia volvuntur, expoſui §. CCCXXII. Lem. I. Maſſae diviſae per volumina exhibent denſitates; ſunt enim hae directe ut maſſae, & reciproce ut volumina: aſſumit autem Boſcovichius in ſuppl. Phil. Stayan. ad L. V. §. 500. maſſas ſolis, Saturni, Iovis ut 199244½; 60, 318; 221, 004, & volumina 679056; 382, 833; 768, 833. Inde prodeunt denſitates, uti in tabella poſitae ſunt. Porro maſſae diviſae per quadrata ſemidiametrorum gravitatis vires in ſuperficie exhibent (§. CCCXV. & CCCXVII) Diametros Auctor ponit in hac ratione pro ſole 91, 619. Pro Saturno 7, 261. Pro Iove 9, 158. Pro terra 1. Indeque rationem gravitatis acceleratricis iisdem, quos in tabella poſuimus, numeris exhibet. Haec animadvertenda erant, ne tabella ſecum ipſa pugnare cenſeatur; neque enim in maſſis, denſitatibus, & gravitatis viribus determinandis eadem elementa aſſumta ſunt, quae in tabella extant.

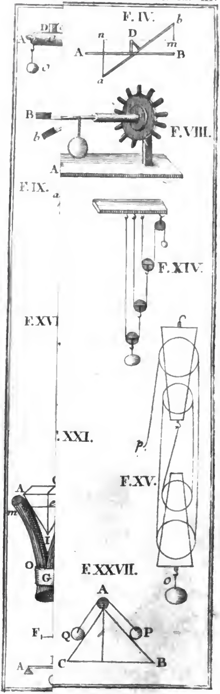
FINIS TOMI II.

O. A. M. D. G.

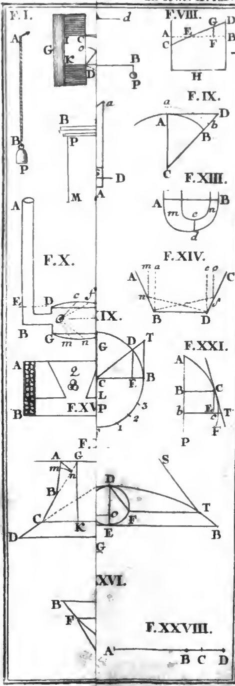

F. I.
F. VII.
IV.
F. XV.
F. X.
F. XI.
F. XIII.
F. XIV.
F. XVI.
n. III.
F. XVIII.
F. XXII.
F. XXIV.
F. XX.

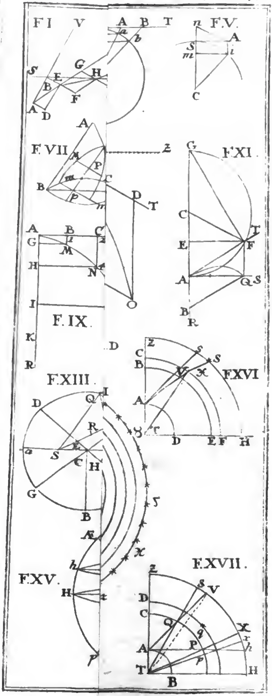

F. IV.
F. I.
F. VII.
F. VIII.
F. IX.
F. XVII.
F. XII.
F. XVIII.
F. XV.
F. XXI.
F. XXV.
F. XXVI.
F. XXIX.
F. XX

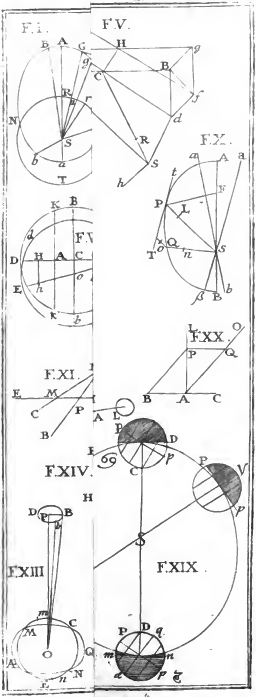
ad Tom. II. Tab. III.



ad Tom: II. Tab. IV.




F. I
F. V.
F. VII
F. XI
F. IX.
F. XIII.
F. XVI
F. XV.
F. XVII.


F.I.
F.V.
F.X.
F.XX.
F.XI.
F.XIV.
F.XIII
F.XIX.